Jahres-Bericht

der

Realschule zu Graudenz

für das Jahr 1864,

erstattet von

G. B. Jacobi,
Director.

Voran eine mathematische Abhandlung „Ueber discontinuirliche bestimmte Integrale"
von dem Lehrer Reinhold Krusemarck.

GRAUDENZ.
Druck von Gustav Röthe.
1864.

Jahres-Bericht

der

Realschule zu Graudenz

für das Jahr 1864,

erstattet von

G. B. Jacobi,
Director.

Voran eine mathematische Abhandlung „Ueber discontinuirliche bestimmte Integrale"
von dem Lehrer Reinhold Krusemarck.

GRAUDENZ.
Druck von Gustav Röthe
1864.

Ueber discontinuirliche bestimmte Integrale.

Die vielfachen bestimmten Integrale, deren Integrationsgrenzen nicht explicite, sondern durch eine Ungleichheit zwischen den Variablen gegeben sind, bieten oft die grössten Schwierigkeiten gerade in der Grenzbestimmung dar. Diese Schwierigkeiten hat Lejeune-Dirichlet dadurch vermieden, dass er vor der Ausführung der Integration das zu integrirende Element mit einem discontinuirlichen Integrale multiplicirt, welches für alle der Grenzbedingung genügenden Werthsysteme der Variablen gleich Eins, für alle übrigen aber gleich Null ist. Nach Einführung dieses discontinuirlichen Factors kann die Integration in Bezug auf sämmtliche Variablen zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ erfolgen, da ja alle der Grenzbedingung nicht entsprechenden Glieder durch jenen Factor vernichtet werden.

Ein wesentliches Hülfsmittel zur wirklichen Ausführung der einzelnen Integrationen liefert hierbei das von Cauchy angegebene Verfahren, gewisse unter den Integralzeichen befindliche Functionen der Variablen durch bestimmte Integrale auszudrücken. Hierdurch wird freilich die Anzahl der überhaupt zu verrichtenden Integrationen vermehrt, aber in den Fällen, wo überhaupt die gleichzeitige Anwendung beider Methoden zum Ziele führt, lassen sich dafür alle übrigen Integrationen ohne Weiteres ausführen und die gegebenen vielfachen Integrale sich soweit reduciren, als es überhaupt die behandelten Probleme gestatten.

Zu den wichtigsten Anwendungen der beschriebenen Methoden gehört unstreitig Dirichlet's Bestimmung der Attraction eines Ellipsoids, wenn die Anziehungskraft einer beliebigen Potenz der Entfernung umgekehrt proportional wirkt, also nach einem Gesetze von grösserer Allgemeinheit, als das Newtonsche. Bei dem grossen Einflusse, den man den attractiven und repulsiven Kräften zur Erklärung physikalischer Erscheinungen gegenwärtig einräumen muss, scheint es wünschenswerth, bei dem von Dirichlet behandelten Grade der Allgemeinheit nicht stehen zu bleiben, sondern vielmehr das Attractionsproblem auf den allgemeinsten Fall auszudehnen, wenn die Anziehung nach einem ganz beliebigen Gesetze von der gegenseitigen Entfernung der beiden anziehenden Massen abhängt. Die Bestimmung der Attraction eines Ellipsoids*) für diesen allgemeinsten Fall bildet vorzugs-

*) Zur Wahl einer von einem Ellipsoid begrenzten Masse führt die gewöhnliche Anschauungsweise in der Elasticitätslehre, wonach ein im Ruhezustande sphärisches Massentheilchen nach erfolgter Störung des Gleichgewichts in ein Ellipsoid übergeht, welches nun mit den benachbarten Massentheilchen in diejenige attractive Wechselwirkung tritt, welche den ursprünglichen Gleichgewichtszustand wieder herzustellen sucht.

weise den Gegenstand der nachfolgenden Abhandlung. Zugleich ist es aber der Zweck derselben, die bestimmten Integrale, von denen die Lösung dieser Aufgabe abhängt, einer genaueren Untersuchung zu unterwerfen. Namentlich werde ich zuerst den Werth des Dirichletschen Integrals auf eine neue Art, durch directe Summation, bestimmen und dann mit Hülfe desselben erstens beliebige Functionen in trigonometrische Reihen entwickeln, zweitens den Fourierschen Lehrsatz auf eine neue Art beweisen. Ferner werde ich aus dem Fourierschen Doppelintegral durch Benutzung eines von Cauchy gefundenen Satzes über discontinuirliche Integrale ein neues Doppelintegral ableiten, welches geeignet ist, sowohl eine beliebige Function auf zweckmässige Art durch ein bestimmtes Integral auszudrücken, als auch die vielfachen Integrale, von denen die Lösung des in Rede stehenden Attractionsproblems abhängt, wesentlich zu vereinfachen. Zuvor werde ich aber die Classe discontinuirlicher bestimmter Integrale, von denen der oben erwähnte Cauchysche Satz handelt, einer ausführlichen Betrachtung unterwerfen.

I. Ueber Dirichlet's discontinuirliches Integral.

§. 1. Bezeichnet k eine positive reelle Constante, θ eine reelle Variable und ρ eine reelle Grösse, deren numerischer Werth nicht grösser werden kann, als die Einheit, so lässt sich der Bruch $\frac{1}{1-\rho e^{ik\theta}}$ stets in eine convergirende, nach Potenzen von $e^{ik\theta}$ fortschreitende geometrische Reihe entwickeln. Bringt man jenen Bruch auf den reellen Nenner $1-2\rho \cos k\theta + \rho^2$, indem man Zähler und Nenner mit $1-\rho e^{-ik\theta}$ multiplicirt, so hat man:

$$\frac{1-\rho e^{-ik\theta}}{1-2\rho\cos k\theta+\rho^2} = 1 + \rho e^{ik\theta} + \rho^2 e^{2ik\theta} + \rho^3 e^{3ik\theta} + \dots.$$

Schafft man die 1 auf die linke Seite und trennt, nach gehöriger Reduction, den reellen Theil vom imaginairen, so erhält man die beiden Formeln:

$$\frac{\rho\cos k\theta - \rho^2}{1-2\rho\cos k\theta+\rho^2} = \rho\cos k\theta + \rho^2\cos 2k\theta + \rho^3\cos 3k\theta + \dots$$

$$\frac{\rho\sin k\theta}{1-2\rho\cos k\theta+\rho^2} = \rho\sin k\theta + \rho^2\sin 2k\theta + \rho^3\sin 3k\theta + \dots$$

Wir haben es hier nur mit der ersten dieser beiden Formeln zu thun. Dieselbe lässt sich, nach einigen leichten Reductionen ihres ersten Theils, folgendermassen schreiben:

$$\frac{1}{k}\frac{d}{d\theta}\,\mathrm{arctng}\left(\frac{\rho\sin k\theta}{1-\rho\cos k\theta}\right) = \mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{n=\infty} \rho^n \cos kn\theta.$$

Multiplicirt man beide Seiten mit $k\,d\theta$ und integrirt von 0 bis θ, so hebt sich k fort und man erhält:

$$\mathrm{arctng}\left(\frac{\rho\sin k\theta}{1-\rho\cos k\theta}\right) = \mathop{\mathrm{S}}_{n=1}^{n=\infty} \rho^n \frac{\sin kn\theta}{n\theta}\cdot\theta$$

Setzt man jetzt $\rho = 1$, so ergiebt sich leicht:

$$\underset{n=1}{\overset{n=\infty}{S}} \frac{\sin kn\theta}{n\theta} \cdot \theta = arctng\left(2\ ctg\ \frac{k\theta}{2}\right).$$

§. 2. Lässt man jetzt θ ins Unendliche abnehmen, jedoch langsamer, als n wächst, so nimmt das Product $n\theta$ den Character einer Variablen an, welche alle Werthe von θ, als dem zu $n = 1$ gehörigen, bis ∞ durchläuft, und der Factor θ unter dem Summenzeichen wird das Differential dieser Variablen. Bezeichnet man dieselbe mit x, so geht die Summe links in ein bestimmtes Integral über, dessen untere Grenze θ ist. Nun ist aber nach einem bekannten Satze von den bestimmten Integralen, da der Factor $\frac{\sin kx}{x}$ in dem unendlich kleinen Intervall von 0 bis θ sein Zeichen nicht ändert,

$$\int_0^\theta \frac{\sin kx}{x}\,dx = \frac{\sin k\sigma}{\sigma} \cdot \theta,$$

wo σ eine zwischen 0 und θ liegende Grösse bezeichnet. Lässt man aber θ und folglich a fortiori σ gegen Null convergiren, so nähert sich das Verhältniss $\frac{\sin k\sigma}{\sigma}$ der Grenze k, und der ganze Ausdruck verschwindet wegen des Factors θ. Man kann daher ohne Weiteres Null als untere Integrationsgrenze nehmen. Der Ausdruck $arctng\left(2\ ctg\ \frac{k\theta}{2}\right)$ nähert sich, wenn θ gegen Null convergirt, der Grenze $arctng\ \infty = \frac{\pi}{2}$. Man hat daher:

$$\int_0^\infty \frac{\sin kx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Durch Multiplication dieser Formel mit -1 erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(-k)x}{x}\,dx = -\frac{\pi}{2}.$$

Das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin kx}{x}\,dx$ ist daher gleich $+\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$, je nachdem k positiv oder negativ ist.

§. 3. Setzt man bald $k = a + b$, bald $k = a - b$, wo a und b zwei positive reelle Grössen bezeichnen, so hat man hiernach immer:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(a+b)x}{x}\,dx = +\frac{\pi}{2},$$

dagegen:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(a-b)x}{x}\,dx = \pm\frac{\pi}{2},$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn $a > b$, und das untere, wenn $a < b$ ist. Es ergiebt sich

durch Addition der beiden letzten Formeln der von Dirichlet angewandte Satz, dass das Integral

$$\int_0^\infty \sin a x \cos b x \, \frac{dx}{x}$$

gleich $\frac{\pi}{2}$ oder Null ist, je nachdem a grösser oder kleiner ist als b.

II. Anwendung auf Entwickelung der Functionen in trigonometrische Reihen und das Fourier'sche Integral.

§. 4. In den bekannten Entwickelungen von Functionen in Reihen, welche nach den *Sinus* oder *Cosinus* der Vielfachen des Arguments fortschreiten, erscheinen die Entwickelungscoëfficienten unter der Form von bestimmten Integralen zwischen endlichen Grenzen. Vermittelst des eben erörterten Lehrsatzes kann man aber diese Entwickelung noch auf eine andere Art bewerkstelligen, wobei die Integrale, durch welche die Coëfficienten ausgedrückt werden, sich von 0 bis ∞ erstrecken.

Bezeichnet man mit $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Functionen, von denen nur vorausgesetzt wird, dass die erstere sich nur nach den *Cosinus*, die zweite nach den *Sinus* der Vielfachen von x entwickeln lasse, so kann man setzen:

(φ) $\varphi(2x) = A_0 + A_1 \cos 2x + A_2 \cos 4x + A_3 \cos 6x + \ldots + A_n \cos 2nx + \ldots$

(ψ) $\psi(2x) = B_0 + B_1 \sin 2x + B_2 \sin 4x + B_3 \sin 6x + \ldots + B_n \sin 2nx + \ldots,$

wobei $A_0, A_1, A_2 \ldots B_0, B_1, B_2 \ldots$ unbestimmte Coëfficienten bezeichnen.

Wir werden zunächst die Werthe der $n+1$ ersten Coëfficienten bestimmen, wo n eine endliche ganze Zahl vorstellt, und nachher beweisen, dass die erlangten Entwickelungen ihre Geltung behalten, auch wenn man n ins Unendliche zunehmen lässt. Multiplicirt man die Gleichung (φ) mit $\frac{\sin x}{x} dx$ und integrirt von 0 bis ∞, so kommt:

$$\int_0^\infty \varphi(2x) \frac{\sin x}{x} dx = A_0 \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx + A_1 \int_0^\infty \frac{\sin x \cos 2x}{x} dx$$
$$+ A_2 \int_0^\infty \frac{\sin x \cos 4x}{x} dx + \ldots$$

Hierin ist der Coëfficient von A_0 gleich $\frac{\pi}{2}$, während die Integrale, mit denen die übrigen Coëfficienten multiplicirt sind, nach §. 3. verschwinden. Man hat demnach:

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi(2x) \frac{\sin x}{x} dx.$$

§. 5. Zur Bestimmung der übrigen Coëfficienten ist es vortheilhaft, die Reihe (φ) folgendermaassen zu schreiben:

$$\varphi(2x) = A_0 + \mathop{S}_1^n A_s \cos 2sx.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\sin(2m+1)x\,\frac{dx}{x}$, wo m eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, und integrirt von 0 bis ∞, so erhält man:

$$\int_0^\infty \varphi(2x)\sin(2m+1)x\,\frac{dx}{x} = A_0\frac{\pi}{2} + \mathop{S}_1^n A_s \int_0^\infty \sin(2m+1)x\cos 2sx\,\frac{dx}{x}.$$

Nun ist nach §. 3. das Integral rechts gleich $\frac{\pi}{2}$ für alle s von 1 bis n, dagegen gleich Null für alle diejenigen Werthe des s, für welche $2s > 2m+1$ ist, d. h. von $s = m+1$ an bis ins Unendliche. Man hat daher:

$$\int_0^\infty \varphi(2x)\sin(2m+1)\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\left(A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{m-1} + A_m\right).$$

Auf dieselbe Art erhält man, wenn man obige Gleichung mit $\sin(2m-1)x\,\frac{dx}{x}$ multiplicirt und dann von 0 bis ∞ integrirt:

$$\int_0^\infty \varphi(2x)\sin(2m-1)x\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\left(A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{m-1}\right).$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der vorigen, so fallen rechts alle Glieder fort bis auf A_m und man erhält:

$$A_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(2x)\,\frac{\sin(2m+1)x - \sin(2m-1)x}{x}\,dx,$$

oder wenn man die beiden Glieder im Zähler rechts zusammenzieht und darauf $x = \frac{\theta}{2}$ setzt:

$$\text{(A.)}\qquad A_m = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \varphi(\theta)\sin\frac{\theta}{2}\cos m\theta\,\frac{d\theta}{\theta}.$$

§. 6. In ähnlicher Weise lassen sich die Coëfficienten der Reihe (ψ) bestimmen. Schreibt man dieselbe folgendermassen:

$$\psi(2x) = \mathop{S}_0^n B_s \sin 2sx,$$

so erhält man, wenn man beide Seiten mit $\cos(2m+1)x\,\frac{dx}{x}$ multiplicirt und 0 bis ∞ integrirt:

$$\int_0^\infty \psi(2x)\cos(2m+1)x\,\frac{dx}{x} = \mathop{S}_0^n B_s \int_0^\infty \sin 2sx\cos(2m+1)x\,\frac{dx}{x}.$$

Hierin ist das Integral rechts gleich Null für alle Werthe des s von Null bis m, dagegen gleich $\frac{\pi}{2}$ von $s = m+1$ bis zu jedem noch so grossen Zahlenwerthe n. Man hat daher:

$$\int_0^\infty \psi(2x)\cos(2m+1)x\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\left(B_{m+1} + B_{m+2} + B_{m+3} + \ldots + B_n\right).$$

Hätte man statt dessen mit $\cos(2m-1)x\,\frac{dx}{x}$ multiplicirt, so hätte man auf dieselbe Art erhalten:

$$\int_0^\infty \varphi(2x)\cos(2m-1)x\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}\left(B_m+B_{m+1}+B_{m+2}+B_{m+3}+\dots+B_n\right).$$

Subtrahirt man hiervon die vorige Gleichung, so heben sich rechts alle Glieder bis auf B_m fort und man erhält:

$$B_m=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \psi(2x)\,\frac{\cos(2m-1)x-\cos(2m+1)x}{x}\,dx,$$

oder, wenn man wieder beide Glieder im Zähler rechts zusammenzieht und $x=\frac{\theta}{2}$ setzt:

$$\text{(B.)}\qquad B_m=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \psi(\theta)\sin\frac{\theta}{2}\sin m\theta\,\frac{d\theta}{\theta}.$$

Was die Coëfficienten A_0, B_0 betrifft, so kann man den Werth des letzteren ohne Weiteres aus der Formel (B.) ableiten, indem man darin $n=0$ setzt. Man findet dadurch $B_0=0$. Den Werth des A_0 dagegen kann man aus der Formel (A.) nicht ableiten, da diese nur von $m=1$ an gilt.

Wollte man in (A.) $m=0$ setzen, so würde man:

$$A_0=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \varphi(\theta)\sin\frac{\theta}{2}\,\frac{d\theta}{\theta}=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \varphi(2x)\sin x\,\frac{dx}{x}$$

finden, was mit dem §. 4. für A_0 gefundenen Werthe im Widerspruche stände. Soll die Formel (A.) auch auf den Fall passen, wo $n=0$ wird, so muss man zuvor in der Reihe (φ) $\frac{A_0}{2}$ anstatt A_0 setzen.

§. 7. Setzt man die Werthe der allgemeinen Coëfficienten A_m, B_m in die Reihen (φ.), (ψ.) ein und schreibt überall $\frac{x}{2}$ anstatt x, so hat man:

$$\text{(S)}\quad\begin{cases}\varphi(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \varphi(\theta)\sin\frac{\theta}{2}\,\frac{d\theta}{\theta}+\frac{4}{\pi}\mathop{S}_{m=1}^{m=n}\int_0^\infty \varphi(\theta)\sin\frac{\theta}{2}\cos m\theta\cos mx\,\frac{d\theta}{\theta};\\[2ex] \psi(x)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\mathop{S}_{m=1}^{m=n}\int_0^\infty \psi(\theta)\sin\frac{\theta}{2}\sin m\theta\sin mx\,\frac{d\theta}{\theta}.\end{cases}$$

Es bezeichne nun $f(x)$ eine solche Function von x, welche mit x stets gleiches oder stets entgegengesetztes Zeichen hat, so dass das Verhältniss $\frac{f(x)}{x}$ sein Zeichen nur dann ändert, wenn x das seinige ändert; ferner sei die Function $f(x)$ so beschaffen, dass das Verhältniss $\frac{f(x)}{x}$ mit wachsendem x stets abnimmt. Setzt man dann:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)];\quad \psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$

so ist $\varphi(-x)=\varphi(x)$; $\psi(-x)=-\psi(x)$, also φ durch eine *Cosinus*reihe, ψ durch eine *Sinus*reihe darstellbar.

Drückt man die Functionen φ und ψ in angeführter Weise durch f aus, so erhält man durch Addition der Gleichungen (S.), wenn man in den Theilen, welche $f(-\theta)$ enthalten, $-\theta$ anstatt θ schreibt und die Integrationsgrenzen umkehrt, die zunächst nur für ein endliches n gültige Gleichung:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\, sin\,\frac{\theta}{2}\,\frac{d\theta}{\theta} + \frac{2}{\pi}\,\mathop{\mathrm{S}}_{m=1}^{m=n}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\, sin\,\frac{\theta}{2}\, cos\, m(\theta - x)\,\frac{d\theta}{\theta},$$

die man auch folgendermaassen schreiben kann:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\, sin\,\frac{\theta}{2}\,\frac{d\theta}{\theta}\left[\frac{1}{2} + \mathop{\mathrm{S}}_{m=1}^{m=n} cos\, m(\theta - x)\right].$$

Das Polynom in der eckigen Klammer ist bekanntlich gleich:

$$\frac{sin\,(n+\frac{1}{2})\,(\theta - x)}{2\, sin\,\frac{1}{2}\,(\theta - x)},$$

Man hat folglich:

$$(f) \qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\cdot\frac{sin\,\frac{\theta}{2}}{\theta}\cdot\frac{sin\,(n+\frac{1}{2})\,(\theta - x)}{sin\,\frac{1}{2}\,(\theta - x)}\, d\theta.$$

Nähert sich dieser Ausdruck einer endlichen Grenze, wenn n ins Unendliche wächst, so darf man auch in obigen Entwickelungen die Gliederzahl ins Unendliche zunehmen lassen, weil die dadurch erhaltenen unendlichen Reihen convergent werden müssen.

§. 8. Um dies zu ermitteln, wollen wir das bestimmte Integral, welches den zweiten Theil der Formel (f) bildet, in lauter engere Integrale zerlegen, deren Grenzen die ungeraden Vielfachen von π sind, so dass man erhält:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\mathop{\mathrm{S}}_{s=-\infty}^{s=+\infty}\int_{(2s-1)\pi}^{(2s+1)\pi} f(\theta)\,\frac{sin\,\frac{\theta}{2}}{\theta}\,\frac{sin\,(n+\frac{1}{2})\,(\theta - x)}{sin\,\frac{1}{2}\,(\theta - x)}\, d\theta.$$

Setzt man hierin $\theta = 2s\pi + \varphi$ für jedes s, so erstrecken sich sämmtliche Integrale unter dem Summenzeichen von $-\pi$ bis $+\pi$, und es wird:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\mathop{\mathrm{S}}_{s=-\infty}^{s=+\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} f(2s\pi + \varphi)\,\frac{sin\,(s\pi + \frac{\varphi}{2})\,.\, sin\,(n+\frac{1}{2})\,(2s\pi + \varphi - x)}{(2s\pi + \varphi)\,.\, sin\,(s\pi + \frac{\varphi - x}{2})}\, d\varphi.$$

Hierin ist:

$$sin\,(n+\frac{1}{2})\,(2s\pi + \varphi - x) = (-1)^s\, sin\,(n+\frac{1}{2})\,(\varphi - x);$$

$$sin\,(s\pi + \frac{\varphi - x}{2}) = (-1)^s\, sin\,\frac{1}{2}\,(\varphi - x);$$

$$sin\,(s\pi + \frac{\varphi}{2}) = (-1)^s\, sin\,\frac{\varphi}{2}.$$

Man hat folglich:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \mathop{\mathrm{S}}_{s=-\infty}^{s=+\infty} (-1)^s \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(2s\pi+\varphi)}{2s\pi+\varphi} \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\varphi-x)}{2\cdot\sin\frac{1}{2}(\varphi-x)} d\varphi.$$

Nach einem von Dirichlet bewiesenen Satze*) ist nun, was für eine Function auch F bezeichnen mag,

$$\lim \left\{ \int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\varphi-x)}{2\sin\frac{1}{2}(\varphi-x)} d\varphi \right\} = \frac{\pi}{2} [F(x+\varepsilon) + F(x-\varepsilon)],$$

wo ε eine unendlich kleine Grösse bezeichnet. Wendet man diesen Satz auf den vorliegenden Fall an, so erhält man:

$$f(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{s=-\infty}^{s=+\infty} (-1)^s \sin\frac{x+\varepsilon}{2} \frac{f(2s\pi+x+\varepsilon)}{2s\pi+x+\varepsilon}$$

$$+ \mathop{\mathrm{S}}_{s=-\infty}^{s=+\infty} (-1)^s \sin\frac{x-\varepsilon}{2} \frac{f(2s\pi+x-\varepsilon)}{2s\pi+x-\varepsilon}.$$

Nun ist nach der Voraussetzung $f(x)$ eine solche Function, dass das Verhältniss $\frac{f(x)}{x}$ stets dasselbe Zeichen behält und mit wachsendem x abnimmt. Die beiden eben erhaltenen Reihen bestehen daher aus lauter Gliedern, deren numerische Werthe mit wachsendem s abnehmen, sind folglich, da diese Glieder abwechselnde Zeichen haben, convergent. Der für $f(x)$ gefundene Ausdruck nähert sich demnach, wenn n ins Unendliche wächst, einer endlichen Grenze, woraus die Convergenz der aus den Entwickelungen im vorigen Paragraphen entspringenden Reihen folgt.

§. 9. Der Beweis des Fourierschen Lehrsatzes vermittelst des Dirichletschen Factors beruht auf einer Anwendung der Eigenschaften dieses Factors auf ein einfaches Integral. Es bezeichne φ eine beliebige Function und r eine positive reelle Constante. Soll nun das Element $\varphi(u)\,du$ zwischen den Grenzen 0 und r integrirt werden, so kann man statt dessen die Integration zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ vornehmen, wenn man zuvor das Element mit dem Factor

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos uv \frac{\sin rv}{v} dv$$

multiplicirt hat, da dieser für alle nicht zwischen 0 und r liegenden Werthe des u verschwindet, dagegen für alle in diesem Intervalle liegenden Werthe gleich Eins ist. Man hat daher:

$$\int_0^r \varphi(u)\,du = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(u) \cos uv \frac{\sin rv}{v} du\,dv.$$

*) Crelle's Journal für Mathematik, Bd. IV., pag. 157.

Differentiirt man diese Gleichung in Bezug auf r, so erhält man:

$$(1) \qquad \varphi(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(u)\cos uv \cos rv\, \partial u\, \partial v.$$

Setzt man jetzt:

$$F(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \psi(u)\sin uv \sin rv\, \partial u\, \partial v,$$

wo ψ eine beliebige andere Function bezeichnet, so erhält man, wenn man beide Seiten dieser Gleichung mit ∂r multiplicirt und zwischen zwei positiven reellen Grenzen r_0 und R integrirt, von denen wir voraussetzen wollen, dass $r_0 < R$ sei:

$$\int_{r_0}^R F(r)\, dr = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \psi(u)\frac{\sin uv}{v}(\cos rv - \cos Rv)\, \partial u\, \partial v.$$

Von dem auf v sich beziehenden Integrale ist nun nach §. 3. der erste Theil Null, so lange $u < r_0$, der zweite, so lange $u < R$ ist; ist $u > R$, so ist jeder der beiden Theile $\frac{\pi}{2}$, also ihre Differenz Null. Ist dagegen $r_0 < u < R$, so ist der erste Theil $= \frac{\pi}{2}$, der zweite Null. Es reducirt sich folglich das Element des auf u bezüglichen Integrals für alle u von r_0 bis R auf $\frac{\pi}{2}\psi(u)du$, und für alle übrigen Werthe des u auf 0. Man hat daher:

$$\int_{r_0}^R F(r)\, dr = \int_{r_0}^R \psi(u)\, du,$$

woraus durch Differentiation nach R folgt: $F(R) = \psi(R)$, also auch $F(r) = \psi(r)$ für jedes beliebige r. Hiernach ist:

$$(2) \qquad \psi(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \psi(u)\sin uv \sin rv\, \partial u\, \partial v.$$

§. 10. Setzt man:

$$\varphi(r) = \frac{1}{2}[f(r) + f(-r)]; \quad \psi(r) = \frac{1}{2}[f(r) - f(-r),$$

so erhält man durch Addition und Subtraction, nachdem man noch in den Integralen, welche die Grösse $f(u)$ enthalten, $-u$ anstatt $+u$ als Integrationsbuchstaben eingeführt und sodann die Grenzen umgekehrt hat, die Fourier'sche Formel.

$$(3) \qquad \begin{cases} f(r) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(r-u)v\, \partial u\, \partial v; \\[2ex] f(-r) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos(r+u)v\, \partial u\, \partial v. \end{cases}$$

Da die Function $\cos(r \pm u)v$ ihr Zeichen nicht ändert, wenn v negativ wird, so kann man die auf v bezügliche Integration ebenfalls zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ vornehmen und dafür das ganze Integral durch 2 dividiren. Statt der Function $\cos(r \pm u)v$ könnte man dann ohne Weiteres die Exponentialgrösse $e^{i(r \pm u)v}$ setzen, da die in der-

selben enthaltene Function $sin(r \pm u)v$ zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ verschwindet. Das Fouriersche Integral würde dadurch auf eine Form gebracht werden, in der es sich vortheilhaft anwenden liesse, um beliebige Functionen durch bestimmte Integrale von der Gattung auszudrücken, wie sie bei dem weiter unten zu behandelnden Attractionsprobleme gebraucht werden. Der weitere Verlauf des Calcüls wird aber zeigen, dass negative Werthe des v durchweg vermieden werden müssen, weil es sonst unmöglich sein würde, die reellen Theile der in Betracht kommenden Integrale erforderlichermaassen von den imaginairen zu trennen. Es wird deshalb im Folgenden eine allgemeine Formel abgeleitet werden, vermittelst deren man eine beliebige Function durch ein Doppelintegral von ähnlicher Form, wie die oben beschriebene, ausdrücken kann, die aber nur positive Werthe derjenigen Variablen enthält, welche im ganzen Verlaufe der Rechnung nie negativ werden darf.

Da diese Deduction sich auf eine von Cauchy gefundene Integralformel stützt, so wird am Angemessensten zuvor die ganze Classe bestimmter Integrale, von denen diese Formel handelt, in ihrer allgemeinsten Form einer genaueren Untersuchung zu unterwerfen sein. Aus den Formeln, zu denen dieselbe führt, wird sich dann die Cauchysche Formel als specieller Fall ergeben.

III. Darstellung einer beliebigen Function durch ein Doppelintegral.

§. 11. Es bezeichne $F(z)$ eine beliebige Function der imaginairen Variablen $z = x + iy$, wo i die imaginaire Grösse $\sqrt{-1}$ bezeichnet, so erhält man durch partielle Differentiation:

$$\frac{\partial F(z)}{\partial x} = F'(x+iy); \quad \frac{\partial F(z)}{\partial y} = iF'(x+iy),$$

woraus sich durch Elimination von $F'(x+iy)$ ergiebt:

$$(i) \qquad \frac{\partial F(x+iy)}{\partial y} = i\,\frac{\partial F(x+iy)}{\partial x}.$$

Wir wollen annehmen, dass die Function $F(x+iy)$ für n Werthsysteme:

$$x = \alpha_1,\ y = \beta_1;\ x = \alpha_2,\ y = \beta_2;\ \ldots\ x = \alpha_n,\ y = \beta_n,$$

welche so geordnet seien, dass man hat:

$$\alpha_1 \angle \alpha_2 \angle \ldots \angle \alpha_n,$$

unendlich werde, aber für alle übrigen Werthsysteme x, y von $x = -\infty$, $y = 0$ bis $x = +\infty$, $y = +\infty$ fortwährend endlich und stetig bleibe. Ferner seien X, Y zwei positive reelle Grössen, welche ins Unendliche zuzunehmen fähig sind, und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ lauter positive reelle unendlich kleine Grössen.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir die Gleichung (i) mit $dx\,dy$ multipliciren und nun nach y von 0 bis Y und nach x zuerst von $x = -X$ bis $x = \alpha_1 - \varepsilon_1$, dann von $x = \alpha_1 + \varepsilon_1$ bis $x = \alpha_2 - \varepsilon_2$, darauf von $x = \alpha_2 + \varepsilon_2$ bis $x = \alpha_3 - \varepsilon_3$ etc., endlich von $x = \alpha_n + \varepsilon_n$ bis $x = +X$ integriren. Da nun der Voraussetzung nach die Function F in allen diesen Intervallen endlich und stetig ist, so kann man die Ordnung aller dieser einzelnen Doppelintegrale nach Belieben umkehren und links zuerst nach y, rechts zuerst nach x integriren. Man erhält dadurch successive:

$$\int_{-X}^{\alpha_1-\varepsilon_1} F(x)dx = \int_{-X}^{\alpha_1-\varepsilon_1} F(x+iY)\,dx + i\int_0^Y F(-X+iy)\,dy - i\int_0^Y F(\alpha_1-\varepsilon_1+iy)\,dy;$$

$$\int_{\alpha_1+\varepsilon_1}^{\alpha_2-\varepsilon_2} F(x)dx = \int_{\alpha_1+\varepsilon_1}^{\alpha_2-\varepsilon_2} F(x+iY)\,dx + i\int_0^Y F(\alpha_1+\varepsilon_1+iy)dy - i\int_0^Y F(\alpha_2-\varepsilon_2+iy)\,dy;$$

$$\int_{\alpha_2+\varepsilon_2}^{\alpha_3-\varepsilon_3} F(x)dx = \int_{\alpha_2+\varepsilon_2}^{\alpha_3-\varepsilon_3} F(x+iY)\,dx + i\int_0^Y F(\alpha_2+\varepsilon_2+iy)dy - i\int_0^Y F(\alpha_3-\varepsilon_3+iy)\,dy;$$

— —

$$\int_{\alpha_n+\varepsilon_n}^{+X} F(x)dx = \int_{\alpha_n+\varepsilon_n}^{+X} F(x+iY)\,dx + i\int_0^Y F(\alpha_n+\varepsilon_n+iy)dy - i\int_0^Y F(+X+iy)\,dy.$$

Addirt man diese Gleichungen und lässt darauf die Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_n$ sich der Null nähern, so erhält man:

$$\int_{-X}^{+X} F(x)\,dx = \int_{-X}^{+X} F(x+iY)\,dx$$

$$-i\int_0^Y [F(X+iy) - F(-X+iy)]\,dy$$

$$+ i.\,lim.\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^Y [F(\alpha_1+\varepsilon_1+iy) - F(\alpha_1-\varepsilon_1+iy)]\,dy \\ \displaystyle + \int_0^Y [F(\alpha_2+\varepsilon_2+iy) - F(\alpha_2-\varepsilon_2+iy)]\,dy \\ + - - - - - - - - - - - - - - \\ \displaystyle + \int_0^Y [F(\alpha_n+\varepsilon_n+iy) - F(\alpha_n-\varepsilon_n+iy)]\,dy\end{array}\right\}.$$

Es muss hierbei bemerkt werden, dass das Integral links nicht alle Werthe des x von $-X$ bis $+X$ enthält, sondern nur diejenigen, für welche die Function $F(x)$ endlich und stetig ist. Die unendlich kleinen Intervalle, innerhalb deren die Function $F(x)$ unendlich wird, welche also die Sprungstellen des discontinuirlichen Integrals enthalten, mussten, wie oben geschehen ist, von vorn herein aus der Betrachtung ausgeschlossen werden, da die Werthe des Products $F(x)\,dx$ in diesen Intervallen im Allgemeinen nicht unendlich klein sind, also nicht zu den Differentialelementen gerechnet werden dürfen, deren Summe das bestimmte Integral ist.

§. 12. Wir wollen jetzt

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot f(x)$$

setzen, wo f eine solche Function bezeichne, dass die Ausdrücke:

$$f(x+iy),\ f'(x+iy),\ f''(x+iy), \ldots f^{(n)}(x+iy)$$

sämmtlich bei beliebigen Werthen des x für $y=\infty$ und bei beliebigen Werthen des y sowohl für $x=+\infty$, als auch für $x=-\infty$ endlich sind, und für alle übrigen Werthe beider Veränderlichen endlich und stetig bleiben. Die beiden Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ seien ganze rationale Functionen, und zwar sei:

$$\psi(x)=k\,(x-\alpha_1-\beta_1 i)^{m'}(x-\alpha_2-\beta_2 i)^{m''}(x-\alpha_3-\beta_3 i)^{m'''}\cdots,$$

und $\varphi(x)$ von niedriger Ordnung, als $\psi(x)$; hierbei bezeichnen m', m'', m''' ... positive ganze Zahlen und k eine beliebige reelle Constante.

Unter dieser Voraussetzung hat jedes der beiden Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,f(x)\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,dx$$

einen endlichen Werth und die Function $F(x)$ genügt allen obigen Bedingungen, da das Product $\varphi(x)f(x)$ fortwährend endlich und stetig bleibt, der Nenner $\psi(x)$ dagegen augenscheinlich für alle übrigen Werthsysteme x, y verschwindet.

Lässt man jetzt in der letzten Gleichung des §. 11. X und Y ins Unendliche zunehmen, so verschwinden, da $\psi(x)$ von höherer Ordnung, als $\varphi(x)$, und $f(x)$ stets endlich ist, die beiden ersten Glieder der rechten Seite, und man erhält:

$$(\text{S.})\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\,f(x)\,dx$$

$$=i.\,lim.\ \mathop{\mathrm{S}}_{s=1}^{s=n}\int_0^Y\left\{\frac{\varphi(\alpha_s+\varepsilon_s+iy)}{\psi(\alpha_s+\varepsilon_s+iy)}\,f(\alpha_s+\varepsilon_s+iy)-\frac{\varphi(\alpha_s-\varepsilon_s+iy)}{\psi(\alpha_s-\varepsilon_s+iy)}\,f(\alpha_s-\varepsilon_s+iy)\right\}dy$$

unter der doppelten Voraussetzung, dass einerseits Y ins Unendliche zunimmt, andrerseits ε_s für jedes s ins Unendliche abnimmt.

§. 13. Zerfällt man die Function $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ in Partialbrüche, so erhält man:

$$(\text{P.})\quad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\mathrm{S}\left[\frac{A_1}{x-\alpha_\sigma-\beta_\sigma i}+\frac{A_2}{(x-\alpha_\sigma-\beta_\sigma i)^2}+\ldots+\frac{A_m}{(x-\alpha_\sigma-\beta_\sigma i)^m}\right].$$

wo m irgend einen der Exponenten m', m'', m''' ... und σ den zugehörigen Wurzelindex bezeichnet, die Summe sich aber über alle diese Wurzelindices nebst den zugehörigen Exponenten erstreckt. Man hat hiernach, wenn man sich eines doppelten Summenzeichens bedient:

$$\frac{\varphi(\alpha_s\pm\varepsilon_s+iy)}{\psi(\alpha_s\pm\varepsilon_s+iy)}=\mathop{\mathrm{S}}_m\ \mathop{\mathrm{S}}_{\mu=1}^{\mu=m}\frac{A_\mu}{[\alpha_s-\alpha_\sigma\pm\varepsilon_s+i(y-\beta_\sigma)]^\mu}.$$

Multiplicirt man beide Seiten dieser Gleichung mit $f(\alpha_s\pm\varepsilon_s+iy)\,dy$ und integrirt von $y=0$ bis $y=Y$, so wird das allgemeine Glied der Doppelsumme rechts:

$$A_\mu\,.\int_0^Y\frac{f(\alpha_s\pm\varepsilon_s+iy)\,dy}{[\alpha_s-\alpha_\sigma\pm\varepsilon_s+i(y-\beta_\sigma)]^\mu},$$

und dieses wird, wenn man hierin $y=\beta_\sigma+\varepsilon_s z$ setzt:

$$= A_\mu\, \varepsilon_s \int_{\frac{-\beta_\sigma}{\varepsilon_s}}^{\frac{Y-\beta_\sigma}{\varepsilon_s}} \frac{f[\alpha_s \pm \varepsilon_s + i(\beta_\sigma + \varepsilon z)]}{[\alpha_s - \alpha_\sigma \pm \varepsilon_s + i\varepsilon_s z]^\mu}\, dz.$$

So lange in diesem Integrale σ von s verschieden ist, behält der Nenner einen von Null verschiedenen Werth, und da ausserdem der Voraussetzung nach die Function f stets endlich ist, so behält das mit $A_\mu\, \varepsilon_s$ multiplicirte Integral einen endlichen Werth, wenn man ε_s gegen Null convergiren lässt; mithin verschwindet das Product dieses Integrals in die unendlich kleine Grösse ε_s und die durch das Zeichen S_m angedeutete Summe reducirt sich auf das eine Glied, worin $\sigma = s$ ist. Man hat also:

$$(\mathrm{A.})\quad \int_0^Y \frac{\varphi(\alpha_s \pm \varepsilon_s + iy)}{\psi(\alpha_s \pm \varepsilon_s + iy)}\, f(\alpha_s \pm \varepsilon_s + iy)\, dy = \mathop{S}_{\mu=1}^{\mu=m} A_\mu \int_{\frac{-\beta_s}{\varepsilon_s}}^{\frac{Y-\beta_s}{\varepsilon_s}} \frac{f[\alpha_s \pm \varepsilon_s + i(\beta_s + \varepsilon_s z)]}{\varepsilon_s^{\mu-1}(\pm 1 + iz)^\mu}\, dz.$$

Da hierin die Function unter dem Integralzeichen endlich und stetig ist, so kann man theilweise integriren. Man erhält dadurch, wenn man zuerst unbestimmt integrirt:

$$\int \frac{f[\alpha_s \pm \varepsilon_s + i(\beta_s + \varepsilon_s z)]}{\varepsilon_s^{\mu-1}(\pm 1 + iz)^\mu}\, dz = -\frac{i}{\mu-1}\, \frac{f[\alpha_s \pm \varepsilon_s + i(\beta_s + \varepsilon_s z)]}{\varepsilon_s^{\mu-1}(\pm 1 + iz)^{\mu-1}}$$

$$+ \frac{1}{\mu-1} \int \frac{f'[\alpha_s \pm \varepsilon + i(\beta_s + \varepsilon_s z)]}{\varepsilon_s^{\mu-2}(\pm 1 + iz)^{\mu-1}}\, dz.$$

Das integrirte Glied wird, wenn man für z die obere Grenze $\frac{Y-\beta_s}{\varepsilon_s}$ setzt:

$$\frac{-i}{\mu-1}\, \frac{f[\alpha_s \pm \varepsilon_s + i(\beta_s + Y - \beta_s)]}{\varepsilon_s^{\mu-1}\left(\pm 1 + i\,\frac{Y-\beta_s}{\varepsilon_s}\right)^{\mu-1}} = \frac{-i}{\mu-1}\, \frac{f(\alpha_s + iY \pm \varepsilon_s)}{(\pm \varepsilon_s + iY - i\beta_s)^{\mu-1}},$$

und wenn man die untere Grenze $z = -\frac{\beta_s}{\varepsilon_s}$ einsetzt:

$$\frac{-i}{\mu-1}\, \frac{f[\alpha_s \pm \varepsilon_s + i(\beta_s - \beta_s)]}{\varepsilon_s^{\mu-1}\left(\pm 1 - i\,\frac{\beta_s}{\varepsilon_s}\right)^{\mu-1}} = \frac{-i}{\mu-1}\, \frac{f(\alpha_s \pm \varepsilon_s)}{(\pm \varepsilon_s - i\beta_s)^{\mu-1}}$$

Beide Ausdrücke werden offenbar, wenn man ε gegen Null convergiren lässt, von dem Vorzeichen, welches darin ε hatte, unabhängig, d. h. jeder von ihnen nimmt, wenn man das obere Zeichen vor ε gelten lässt, denselben Werth an, wie wenn man das untere gewählt hätte. Lässt man daher dort, wo die Doppelzeichen vorkommen, überall erst das obere, dann das untere Zeichen gelten, subtrahirt die erhaltenen Ausdrücke von einander und

lässt darauf ε sich der Null nähern, so hebt sich das integrirte Glied ganz fort und man erhält:

$$lim. \int_{\frac{\beta_s}{\varepsilon_s}}^{\frac{Y-\beta_s}{\varepsilon_s}} \left\{ \frac{f[\alpha_s+\varepsilon_s+i(\beta_s+\varepsilon_s z)]}{\varepsilon_s^{\mu-1}(1+iz)^{\mu}} - \frac{f[\alpha_s-\varepsilon_s+i(\beta_s+\varepsilon_s z)]}{\varepsilon_s^{\mu-1}(-1+iz)^{\mu}} \right\} dz$$

$$= \frac{1}{\mu-1}\, lim. \int_{-\frac{\beta_s}{\varepsilon_s}}^{\frac{Y-\beta_s}{\varepsilon_s}} \left\{ \frac{f'[\alpha_s+\varepsilon_s+i(\beta_s+\varepsilon_s z)]}{\varepsilon_s^{\mu-2}(1+iz)^{\mu-1}} - \frac{f'[\alpha_s-\varepsilon_s+i(\beta_s+\varepsilon_s z)]}{\varepsilon_s^{\mu-2}(-1+iz)^{\mu-1}} \right\} dz.$$

Der zweite Theil dieser Gleichung hat offenbar dieselbe Form, wie der erste und unterscheidet sich von jenem nur dadurch, dass $\mu-1$ anstatt μ und f' anstatt f gesetzt und der ganze Ausdruck durch $\mu-1$ dividirt ist. Man erhält folglich, wenn man rechts noch einmal theilweise integrirt, aus denselben Gründen:

$$\frac{1}{(\mu-1)(\mu-2)}\, lim. \int_{-\frac{\beta_s}{\varepsilon_s}}^{\frac{Y-\beta_s}{\varepsilon_s}} \left\{ \frac{f''[\alpha_s+\varepsilon_s+i(\beta_s+\varepsilon_s z)]}{\varepsilon_s^{\mu-3}(1+iz)^{\mu-2}} - \frac{f''[\alpha_s-\varepsilon_s+i(\beta_s+\varepsilon_s z)]}{\varepsilon_s^{\mu-3}(-1+iz)^{\mu-2}} \right\} dz.$$

Fährt man auf diese Art fort, theilweise zu integriren, was erlaubt ist, da der Annahme nach die Functionen $f(x+iy)$, $f'(x+iy)$, $f''(x+iy)$ etc. endlich und stetig sind, so gelangt man schliesslich zu dem Ausdrucke:

$$\frac{1}{(\mu-1)!}\, lim. \int_{-\frac{\beta_s}{\varepsilon_s}}^{\frac{Y-\beta_s}{\varepsilon_s}} \left\{ \frac{f^{(\mu-1)}[\alpha_s+\varepsilon_s+i(\beta_s+\varepsilon_s z)]}{1+iz} - \frac{f^{(\mu-1)}[\alpha_s-\varepsilon_s+i(\beta+\varepsilon_s z)]}{-1+iz} \right\} dz,$$

wobei sich das Zeichen *lim.* überall auf eine unendliche Abnahme des ε_s und auf ein unendliches Wachsen des Y bezieht.

Wir wollen nun das Uebereinkommen treffen, dass Y zwar ins Unendliche zunimmt, jedoch langsamer, als ε_s abnimmt, so dass das Product $\varepsilon_s Y$ sich der Null nähert. Dann nähert sich, da z zwischen 0 und Y liegt, a fortiori das Product $\varepsilon_s z$ der Null und die beiden Zähler unter dem Integralzeichen convergiren gegen den gemeinsamen Werth $f^{(\mu-1)}(\alpha_s+i\beta_s)$. Nimmt man zuerst an, dass $\beta_s > 0$ sei, so wird obiger Ausdruck:

$$= \frac{f^{(\mu-1)}(\alpha_s+i\beta_s)}{(\mu-1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,dz}{1+z^2} = 2\pi \cdot \frac{f^{(\mu-1)}(\alpha_s+i\beta_s)}{(\mu-1)!}$$

Dagegen wird derselbe, wenn $\beta_s = 0$ ist,

$$= \frac{f^{(\mu-1)}(\alpha_s)}{(\mu-1)!} \int_0^\infty \frac{2dz}{1+z^2} = \pi \frac{f^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!};$$

Ist endlich $\beta_s < 0$, so wird er:

$$= \frac{f^{(\mu-1)}(\alpha_s - i\beta_s)}{(\mu-1)!} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{2\,dz}{1+z^2} = 0.$$

Der Ausdruck selbst, dessen Werth auf diese Art festgestellt worden, ist der Formel §. 13. (A.) zufolge nichts Anderes, als der Coëfficient von A_μ in der Entwickelung des Integrals:

$$\int_0^Y \frac{\varphi(\alpha_s \pm \varepsilon_s + iy)}{\psi(\alpha_s \pm \varepsilon_s + iy)} f(\alpha_s \pm \varepsilon_s + iy)\,dy,$$

wenn man in demselben vor ε das Pluszeichen, darauf das Minuszeichen gelten lässt und die beiden daraus erhaltenen Integrale von einander subtrahirt, also mit anderen Worten, in der Entwickelung des Integrals unter dem Summenzeichen in (S) §. 12.

§. 14. Nimmt man zunächst an, alle β seien positiv und setzt für einen Augenblick:

$$\alpha_s + i\beta_s = x_s,$$

so wird nach dem Bisherigen das allgemeine Glied der Reihe (S) in §. 12.:

$$= 2\pi \left\{ A_1 f(x_s) + A_2 \frac{f'(x_s)}{1} + A_3 \frac{f''(x_s)}{1\cdot 2} + A_4 \frac{f'''(x_s)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + A_m \frac{f^{(m-1)}(x_s)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)} \right\}.$$

Um den Coëfficienten $A_\mu^{(\sigma)}$ zu bestimmen, wo der Index σ sich auf die verschiedenen Wurzeln bezieht, kann man die Gleichung (P.) des §. 14. auf beiden Seiten mit $(x-x_s)^m$ multipliciren, wo m eine bestimmte der Zahlen m', m'', m'''... bezeichnet, darauf beide Theile $m-\mu$mal hinter einander nach x differentiiren und schliesslich $x=x_\sigma$ setzen. Es verschwinden durch die Differentiation alle die Glieder, welche vor $A_\mu^{(\sigma)}(x-x_s)^{m-\mu}$ vorhergehen und alle folgenden durch die Substitution $x=x_s$; man behält also nur:

$$A_\mu^{(\sigma)} = \frac{1}{(m-\mu)!} \left\{ \frac{\partial^{m-\mu}}{\partial x^{m-\mu}} \left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} (x-x_s)^m \right] \right\}_{x=x_s},$$

und hierfür kann man, wenn man $x = x_s + \varepsilon$ setzt, wo σ irgend einen andern Wurzelindex bezeichnet, auch schreiben:

$$A_\mu^{(\sigma)} = \frac{1}{(m-\mu)!} \left\{ \frac{\partial^{m-\mu}}{\partial \varepsilon^{m-\mu}} \left[\varepsilon^m \frac{\varphi(x_s+\varepsilon)}{\psi(x_s+\varepsilon)} \right] \right\}_{\varepsilon=0}.$$

Ferner kann man das erhaltene Polynom folgendermaassen schreiben:

$$= 2\pi \left\{ A_1 f(x_s + \varepsilon) + \frac{A_2}{1} \frac{\partial f(x_s + \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{A_3}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 f(x_s + \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} + \cdots \right.$$

$$\left. + \frac{A_m}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} f(x_s + \varepsilon)}{\partial \varepsilon^{m-1}} \right\} \varepsilon = 0,$$

und dieses hat, wenn man für A_1, A_2 ... ihre eben angeführten Werthe einsetzt und für einen Augenblick u anstatt $\frac{\varphi(x_s + \varepsilon)}{\psi(x_s + \varepsilon)}$ und v anstatt $f(x_s + \varepsilon)$ schreibt, die Form:

$$2\pi \left\{ \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \varepsilon^{m-1}} v + \frac{1}{(m-2)!} \frac{\partial^{m-2} u}{\partial \varepsilon^{m-2}} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{(m-3)!} \frac{\partial^{m-3} u}{\partial \varepsilon^{m-3}} \frac{\partial^2 v}{\partial \varepsilon^2} \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{1}{(m-1)!} u \frac{\partial^{m-1} v}{\partial \varepsilon^{m-1}} \right\} \varepsilon = 0,$$

ist also, wie man leicht einsieht, gleich:

$$\frac{2\pi}{(m-1)!} \left\{ \frac{\partial^{m-1}(uv)}{\partial \varepsilon^{m-1}} \right\} \varepsilon = 0.$$

Man hat hiernach vermöge der Gleichung (S.):

$$[1.] \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} f(x)\, dx$$

$$= 2i\pi \, \mathop{\mathrm{S}}_{s=1}^{s=n} \frac{1}{(m_s - 1)!} \left\{ \frac{\partial^{m_s - 1}}{\partial \varepsilon^{m_s - 1}} \left[\frac{\varphi(\alpha_s + i\beta_s + \varepsilon)}{\psi(\alpha_s + i\beta_s + \varepsilon)} f(\alpha_s + i\beta_s + \varepsilon) \varepsilon^{m_s} \right] \right\} \varepsilon = 0.$$

wo m_s den Exponenten von $x - \alpha_s - i\beta_s$ in $\psi(x)$ bezeichnet.

Ist ein Theil der Wurzeln der Gleichung $\psi(x) = 0$ reell, also ein Theil der β Null, so ist der betreffende Theil der Summe rechts auf die Hälfte zu reduciren. Ist dagegen ein Theil der β negativ, so ist der betreffende Theil der Summe Null. Hat demnach die Function ψ die Form:

$$\psi(x) = k(x - \alpha_1 - i\beta_1)^{m_1} (x - \alpha_2 - i\beta_2)^{m_2} \ldots (x - \alpha_p - i\beta_p)^{m_p}$$

$$\cdot (x - \alpha'_1 + i\beta'_1)^{m'_1} (x - \alpha'_2 + i\beta'_2)^{m'_2} \ldots (x - \alpha'_{p'} - i\beta'_{p'})^{m'_{p'}}$$

$$\cdot (x - \gamma_1)^{n_1} (x - \gamma_2)^{n_2} \ldots (x - \gamma_q)^{n_q}$$

so hat man allgemein:

$$[2.] \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} f(x)\, dx$$

$$= 2i\pi \underset{s=1}{\overset{s=p}{\mathrm{S}}} \frac{1}{(m_s-1)!} \left\{ \frac{\partial^{m_s-1}}{\partial \varepsilon^{m_s-1}} \left[\frac{\varphi(\alpha_s + i\beta_s + \varepsilon)}{\psi(\alpha_s + i\beta_s + \varepsilon)} f(\alpha_s + i\beta_s + \varepsilon)\varepsilon^{m_s} \right] \right\}_{\varepsilon=0}$$

$$+ i\pi \underset{s=1}{\overset{s=q}{\mathrm{S}}} \frac{1}{(n_s-1)!} \left\{ \frac{\partial^{n_s-1}}{\partial \varepsilon^{n_s-1}} \left[\frac{\varphi(\gamma_s + \varepsilon)}{\psi(\gamma_s + \varepsilon)} f(\gamma_s + \varepsilon)\varepsilon^{n_s} \right] \right\}_{\varepsilon=0}.$$

Es muss hierbei bemerkt werden, dass, wenn ein Wurzelfactor, etwa $x-h-ik$ in der Function $\psi(x)$ nur einmal vorkommt, eine theilweise Integration, wie sie oben vorgenommen wurde, nicht erforderlich ist. Die Glieder, welche solchen lineairen Wurzelfactoren entsprechen, enthalten daher statt der Derivirten die Functionen selbst. Wenn also die Formeln [1], [2] auch die Glieder umfassen sollen, welche den lineairen Wurzelfactoren entsprechen, so muss man einen Ausdruck wie $\frac{d^{m-1}u}{d\varepsilon^{m-1}}$ in dem Falle, wo $m=1$ wird, wo er also die Form: $\frac{d^0u}{d\varepsilon^0}$ erhält, als mit u selbst gleichbedeutend ansehen. Die Facultät $(m-1)!$ erhält für $m=1$ den Werth 1.

§. 15. Reducirt sich die Function $\psi(x)$ auf einen einzigen lineairen Wurzelfactor $x-h-ik$, und die Function $\varphi(x)$ auf die Einheit, so reducirt sich auch der zweite Theil der Formel [2] auf ein Glied, welches entweder aus der ersten oder aus der zweiten der beiden Summen rechts zu entnehmen ist, je nachdem $k>0$ oder $k=0$ ist.

Im ersten Falle wird $\psi(\alpha+i\beta+\varepsilon)=\alpha+i\beta+\varepsilon-\alpha-i\beta=\varepsilon$, und im zweiten: $\psi(\gamma+\varepsilon)$ $=\gamma+\varepsilon-\gamma=\varepsilon$. Es hebt sich daher rechts $\varepsilon^m=\varepsilon$ fort und die Formel [2] giebt ohne Weiteres:

$$[3.] \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)\,dx}{x-h-ik} = 2i\pi\, f(h+ik),\ \text{oder:}$$
$$= i\pi\, f(h),\ \text{oder} = 0,$$

je nachdem k positiv, gleich Null oder negativ ist. Diese Formel [3] ist die von Cauchy gefundene, deren wir uns weiter unten zu dem bereits besprochenen Zwecke bedienen werden.

Setzt man in [3] $k=0$ und h bald gleich $+r$, bald gleich $-r$, so erhält man durch Addition und Subtraction leicht:

$$[4.] \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\frac{r\,dx}{x^2-r^2} = i\pi\,[f(r)-f(-r)]; \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\frac{x\,dx}{x^2-r^2} = i\pi\,[f(r)+f(-r)]. \end{cases}$$

Die Formel [4] endlich giebt, wenn man $f(x)=e^{ikx}$ setzt, und in dem Theile des Integrals, welcher sich von $-\infty$ bis 0 erstreckt, $-x$ anstatt x schreibt:

$$[5.]\quad \int_0^\infty \cos kx \frac{r\,dx}{x^2-r^2} = -\frac{\pi}{2}\sin kr;\quad \int_0^\infty \sin kx \frac{x\,dx}{x^2-r^2} = +\frac{\pi}{2}\cos kr,$$

wobei k eine positive reelle Constante bezeichnet.

§. 16. Wir wollen nun mit $f(x)$ eine Function bezeichnen, welche den in §. 12. gestellten Bedingungen genügt, und mit h, k zwei reelle Constanten, von denen jedoch die letztere wesentlich positiv sei. Dieses vorausgesetzt, so kann man die im §. 10. besprochene Formel mit Hülfe der Formeln [3], [4], [5] aus folgendem Doppelintegrale herleiten:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty f(u)\, e^{-[k+i(u-h)]v}\,\partial v\,\partial u.$$

In demselben kann man die Integration in Bezug auf v sogleich ausführen. Man erhält dadurch:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(u)\,du}{k+i(u-h)} = -i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(u)\,du}{u-h-ik},$$

und dieses Integral ist wegen [3] gleich $2\pi f(h+ik)$. Man hat folglich, wenn man nun die Ordnung der Integrationen umkehrt:

$$[6.]\quad f(h+ik) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-[k+i(u-h)]v}\,\partial u\,\partial v.$$

Dagegen findet man durch dasselbe Verfahren:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty f(u)\, e^{-[k-i(u+h)]v}\,\partial v\,\partial u$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(u)\,du}{k-i(u+h)} = i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(u)\,du}{u+h+ik},$$

und dieser Ausdruck verschwindet nach demselben Satze. Man findet also, wenn man wieder die Ordnung umkehrt:

$$[7.]\quad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-[k-i(u+h)]v}\,\partial u\,\partial v.$$

§. 17. Soll nun die Formel [6] dazu gebraucht werden, um eine Function f einer reellen Variablen durch ein Doppelintegral auszudrücken, wie es unser nächster Zweck ist, so muss zuvörderst nachgewiesen werden, dass diese Formel ihre Gültigkeit behält, auch wenn man darin k gegen Null convergiren lässt.

Wir wollen zu diesem Zwecke:

$$A = \int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos uv \sin rv\,\partial u\,\partial v$$

$$B = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin uv \cos rv \,\partial u \,\partial v$$

setzen wo r eine wesentlich positive reelle Constante bezeichne. Drückt man unter den Integralzeichen die Functionen *cos* und *sin* vermöge der Formeln [5] durch bestimmte Integrale aus, so wird:

$$A = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \sin vw \sin rv \frac{w \,\partial u \,\partial v}{u^2 - w^2} \partial v;$$

$$B = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos vw \cos rv \frac{u \,\partial u \,\partial v}{u^2 - w^2} \partial v,$$

und hierin kann man nun die auf u bezügliche Integration vermittelst der Formeln [4] ausführen.

Man erhält dadurch:

$$A = -\frac{i}{2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} [f(w) - f(-w)] \sin vw \sin rv \,\partial w \,\partial v;$$

$$B = \frac{i}{2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} [f(w) + f(-w)] \cos vw \cos rv \,\partial w \,\partial v.$$

Wenn man in dem zweiten Gliede eines jeden dieser beiden Integrale w in $-w$ verwandelt, so stimmen diese beiden Glieder genau mit den beiden ersten überein. Man hat daher:

$$A = -i \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(w) \sin wv \sin rv \,\partial w \,\partial v;$$

$$B = i \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(w) \cos wv \cos rv \,\partial w \,\partial v.$$

Hieraus folgt durch Addition und Subtraction:

$$A + B = i \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(w) \cos (r + w) v \,\partial w \,\partial v,$$

$$A - B = -i \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(w) \cos (r - w) v \,\partial w \,\partial v,$$

mithin, wenn man die Fourier schen Formeln §. 10. [3] anwendet:

$$A + B = i\pi f(-r); \quad A - B = -i\pi f(r).$$

Man hat also:

$$[8.]\quad \begin{cases} f(r) = \dfrac{i}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\sin(r-u)\,v\,\partial u\,\partial v\,; \\ f(-r) = -\dfrac{i}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\sin(r+u)\,v\,\partial u\,\partial v. \end{cases}$$

Wenn man diese Formeln mit den eben erwähnten §. 10. [3] bald durch Addition bald durch Subtraction verbindet, so erhält man:

$$[9.]\qquad f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,e^{i(r-u)v}\,\partial u\,\partial v\,;$$

$$[10.]\qquad f(-r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,e^{-i(r+u)v}\,\partial u\,\partial v\,;$$

$$[11.]\qquad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,e^{i(u\pm r)v}\,\partial u\,\partial v.$$

Schreibt man noch $f\left(\sqrt[n]{r}\right)$ statt $f(r)$ und r^n statt r, so ergeben sich aus den Formeln [9], [10] unmittelbar die folgenden:

$$[12.]\qquad f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt[n]{u})\,e^{i(r^n-u)v}\,\partial u\,\partial v\,;$$

$$[13.]\qquad f(r\sqrt[n]{-1}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt[n]{u})\,e^{-i(r^n+u)v}\,\partial u\,\partial v.$$

Diese letzten Formeln sind es, deren wir uns bei dem jetzt zu behandelnden Attractionsproblem bedienen wollen, um beliebige Functionen durch bestimmte Integrale auszudrücken.

IV. Bestimmung der Attraction eines Ellipsoids, wenn die Anziehungskraft durch eine beliebige Function der Entfernung ausgedrückt wird.

§. 18. Es seien a, b, c die Coordinaten eines Punktes, welcher von einem homogenen Ellipsoid:

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

angezogen wird; $f(r)$ bezeichne die beschleunigende Kraft, mit welcher der Punkt von jedem beliebigen um die Strecke:

$$(2)\qquad r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$

von ihm entfernten Massenelemente des Ellipsoids angegriffen wird, und X, Y, Z seien die parallel den drei Axen wirkenden Hauptcomponenten der Attraction. Die Dichtigkeit kann, der Allgemeinheit unbeschadet, der Einheit gleichgesetzt werden.

Dieses vorausgesetzt, hat man:

$$(3)\qquad \begin{cases} X=\int\int\int f(r)\,\frac{a-x}{r}\,\partial x\,\partial y\,\partial z \\ Y=\int\int\int f(r)\,\frac{b-y}{r}\,\partial x\,\partial y\,\partial z \\ Z=\int\int\int f(x)\,\frac{c-z}{r}\,\partial x\,\partial y\,\partial z, \end{cases}$$

wobei sich die dreifache Integration über sämmtliche Massenelemente des Ellipsoids erstreckt.

Bezeichnet man mit $F(r)$ das Integral: $\int_0^r f(x)\,dx$, so dass:

$$f(r) = \frac{dF(r)}{dr}$$

wird, und setzt:

$$V = \int\int\int F(r)\,\partial x\,\partial y\,\partial z,$$

wobei die Integration sich ebenfalls über alle Elemente des Ellipsoids (1) erstreckt, so erhält man durch partielle Differentiation nach a, b, c offenbar:

$$X = \frac{\partial V}{\partial a};\ Y = \frac{\partial V}{\partial b};\ Z = \frac{\partial V}{\partial c}.$$

Es lässt sich folglich die Bestimmung der drei Attractionscomponenten X, Y, Z auf die des dreifachen Integrals V, des sogen. Potentials, zurückführen.

§. 19. Damit das Element $\partial x\ \partial y\ \partial z$ der Masse des Ellipsoid (1) angehöre, ist es nothwendig und hinreichend, dass die Ungleichheit:

$$(4)\qquad 0 < \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} < 1$$

für alle unter dem Integralzeichen vorkommenden Werthsysteme x, y, z erfüllt werde. Dieser Zweck wird erreicht, wenn man das zu integrirende Element vor der Integration mit dem Factor:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}\right)\theta\,.\,\frac{sin\,\theta}{\theta}\,\partial\theta$$

multiplicirt. Die Integration in Bezug auf x, y, z kann darauf zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ erfolgen, da jener Factor alle die Glieder, welche der Ungleichheit (4) nicht genügen, destruirt, für alle übrigen aber gleich Eins ist. Zur wirklichen Ausführung der auf x, y, z bezüglichen Integration wird es nothwendig, zuvor die Functiow $F(r)$ durch ein bestimmtes Integral auszudrücken. Wir bedienen uns zu diesem Zwecke der Formel §. 17. [12], welche für $n = 2$ liefert:

$$F(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty F(\sqrt{u})\,e^{i(r^2-u)v}\,\partial u\,\partial v.$$

Das Potential V nimmt hierdurch, wenn man für einen Augenblick:

$$\eta^2 = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2}$$

setzt, folgende Form an:

$$V = \frac{2}{\pi^2} \int\int_0^\infty \int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sqrt{u})\, e^{i(r^2 - u)v} \cos\eta^2\theta \, \frac{\sin\theta}{\theta} \, \partial x\, \partial y\, \partial z\, \partial u\, \partial v\, \partial\theta.$$

Zwar ist in dieser Gestalt das Integral V keiner wesentlichen Reductionen fähig. Man sieht aber leicht ein, dass dieses Integral als der reelle Theil von folgendem:

$$U = \frac{2}{\pi^2} \int\int_0^\infty \int\int\int\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sqrt{u})\, e^{i(vr^2 - \theta\eta^2)} e^{-iuv} \frac{\sin\theta}{\theta} \, \partial x\, \partial y\, \partial z\, \partial u\, \partial v\, \partial\theta$$

angesehen werden kann, welches vermittelst bekannter Integralformeln wesentlich vereinfacht werden kann. Man braucht daher, um das Potential V zu bestimmen, nur das Integral U soweit als möglich zu reduciren und den zuletzt erhaltenen Ausdruck auf seinen reellen Theil zu reduciren.

§. 20. Zunächst erhält man als Werth des dreifachen, auf x, y, z bezüglichen Integrals:

$$\int\int\int_{-\infty}^{-\infty} e^{i[(v + \frac{\theta}{\alpha^2})x^2 - 2avx]}\, e^{i[(v + \frac{\theta}{\beta^2})y^2 - 2bvy]}\, e^{i[(v + \frac{\theta}{\gamma^2})z^2 - 2cvz]}\, \partial x\, \partial y\, \partial z$$

vermöge der bekannten Formel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(kt^2 + 2ht)\sqrt{-1}}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{k}} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{h^2}{k}\right)\sqrt{-1}}$$

leicht folgenden Ausdruck:

$$\frac{\pi^{3/2}\, e^{\frac{3\pi i}{4}} \cdot e^{-i\left(\frac{a^2v^2}{v + \frac{\theta}{\alpha^2}} + \frac{b^2v^2}{v + \frac{\theta}{\beta^2}} + \frac{c^2v^2}{v + \frac{\theta}{\gamma^2}}\right)}}{\sqrt{\left(v + \frac{\theta}{\alpha^2}\right)\left(v + \frac{\theta}{\beta^2}\right)\left(v + \frac{\theta}{\gamma^2}\right)}},$$

welcher wegen des Factors: $e^{+i(a^2 + b^2 + c^2)v}$ die Form:

$$\frac{\pi^{3/2}\, e^{\frac{3\pi i}{4}} \cdot e^{-i\left(\frac{a^2}{\theta + \alpha^2 v} + \frac{b^2}{\theta + \beta^2 v} + \frac{c^2}{\theta + \gamma^2 v}\right)\theta v}}{\sqrt{\left(v + \frac{\theta}{\alpha^2}\right)\left(v + \frac{\theta}{\beta^2}\right)\left(v + \frac{\theta}{\gamma^2}\right)}}$$

annimmt. Setzt man also:

$$(5) \qquad \left(1 + \frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\beta^2}\right)\left(1 + \frac{s}{\gamma^2}\right) = \rho^2;\ \frac{a^2}{s + \alpha^2} + \frac{b^2}{s + \beta^2} + \frac{c^2}{s + \gamma^2} = \sigma,$$

und führt durch die Gleichung $v = \frac{\theta}{s}$, θ als constant ansehend, eine neue Variable s ein, so erhält man:

$$U = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{3\pi i}{4}} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sqrt{u})\, e^{i\sigma\theta}\, e^{-\frac{iu\theta}{s}} \frac{\sin\theta}{\theta^{3/2}} \frac{\partial u\, \partial\theta\, \partial s}{\rho \sqrt{s}}$$

Setzt man hierin sv für θ und differentiirt darauf in Bezug auf a, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{4ai}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{3\pi i}{4}} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sqrt{u}) \frac{e^{i(s\sigma - u)v} \sin sv}{\rho (s + a^2) \sqrt{v}}\, \partial u\, \partial v\, \partial s,$$

oder, wenn man anstatt $\sin sv$ die Exponentialgrösse $\frac{1}{2i}\left(e^{isv} - e^{-isv}\right)$ einführt:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = -\frac{2a}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{3\pi i}{4}} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\sqrt{u})}{\rho (s + a^2) \sqrt{v}} \left\{ e^{i[(1+\sigma)s - u]v} - e^{i[(\sigma-1)s-u]v} \right\} \partial u\, \partial v\, \partial s.$$

Da in dieser Formel die Integration nach u zuerst auszuführen ist, wird es zweckmässig sein, die reciproke Quadratwurzel $\frac{1}{\sqrt{v}}$ durch das Eulersche Integral:

$$\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\pi i}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivt^2} dt$$

auszudrücken. Man erhält dadurch:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = -\frac{2a}{\pi} e^{\frac{\pi i}{2}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\sqrt{u})}{\rho (s + a^2)} \left\{ e^{i[(1+\sigma)s + t^2 - u]v} - e^{-i[(1-\sigma)s - t^2 + u]v} \right\} \partial u\, \partial v\, \partial t\, \partial s.$$

§. 21. Das Doppelintegral, welches sich auf u und v bezieht, zerfällt in folgende beiden Theile:

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sqrt{u})\, e^{i[(1+\sigma)s + t^2 - u]v}\, \partial u\, \partial v;$$

$$K = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sqrt{u})\, e^{-i[(1-\sigma)s - t^2 + u]v}\, \partial u\, \partial v.$$

Der Werth des ersteren Theiles ist, da die Grösse $(1+\sigma)s + t$ positiv ist, nach der Formel §. 17. [12] gleich $F[\sqrt{(1+\sigma)s + t^2}]$. Für den zweiten Theil findet man, wenn $(1-\sigma)s - t^2 > 0$ ist, aus der Formel §. 17. [13] den Werth: $F[i\sqrt{(1-\sigma)s - t^2}]$, dagegen, wenn $(1-\sigma)s - t^2 < 0$ ist, aus der Formel §. 17. [12] den Werth:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sqrt{u})\, e^{i[t^2-(1-\sigma)s-u]v}\,\partial u\,\partial v = F[\sqrt{t^2-(1-\sigma)s}].$$

Wir wollen nun annehmen, der Punkt a, b, c liege innerhalb des Ellipsoids. Dann ist:

$$\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}<1,$$

mithin a fortiori $\sigma < 1$, also $(1-\sigma)s > 0$. Setzt man daher:

$$P = -2ae^{\frac{i\pi}{2}}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} F[\sqrt{(1+\sigma)s+t^2}]\;\frac{\partial t\,\partial s}{\rho(s+\alpha^2)};$$

$$Q = 4ae^{\frac{i\pi}{2}}\int_0^\infty\int_{\sqrt{1-\sigma}\sqrt{s}}^{+\infty} F[\sqrt{t^2-(1-\sigma)s}]\;\frac{\partial t\,\partial s}{\rho(s+\alpha^2)},$$

so hat man:

$$(6)\qquad \frac{\partial U}{\partial a} = P + Q + 4ae^{\frac{\pi i}{2}}\int_0^\infty\int_0^{\sqrt{(1-\sigma)s}} F[i\sqrt{(1-\sigma)s-t^2}]\;\frac{\partial t\,\partial s}{\rho(s+\alpha^2)}.$$

§. 22. Die Summe der beiden Integrale P, Q kann man auch folgendermaassen schreiben:

$$-4a^{\frac{\pi}{2}i}\int_0^\infty\int_{\sqrt{(1+\sigma)}\sqrt{s}}^\infty \Big\{F[\sqrt{t^2+(1+\sigma)s}] - F[\sqrt{t^2-(1-\sigma)s}]\Big\}\frac{\partial t\,\partial s}{\rho(s+\alpha^2}$$

$$-4ae^{\frac{\pi i}{2}}\int_0^\infty\int_0^{\sqrt{1-\sigma}\sqrt{s}} F[\sqrt{t^2+(1+\sigma)s}]\;\frac{\partial t\,\partial s}{\rho(s+\alpha^2)}.$$

Das zweite dieser beiden Integrale hat in Bezug auf t endliche Grenzen; sein reeller Theil wird daher, da die Function F endlich ist, durch den Factor $\cos\frac{\pi}{2}$ destruirt. Was das andere Integral anlangt, so ist zwar die obere Grenze unendlich; es nähert sich aber, der Voraussetzung nach, das Product $t\cdot F(t)$ für unendlich grosse Werthe des t einer festen endlichen Grenze w, mithin das Product:

$$t.\Big\{F[\sqrt{t^2+(1+\sigma)s}]-F[\sqrt{t^2-(1-\sigma)s}]$$

$$= t\,.\,F\left[t\sqrt{1+(1+\sigma)\frac{s}{t^2}}\right] - t\,.\,F\left[t\sqrt{1-(1-\sigma)\frac{s}{t^2}}\right]$$

der Grenze $w-w=0$. Aus einem bekannten Fundamentaltheorem folgt daher, dass auch dieses Integral endlich ist, dass folglich sein reeller Theil durch denselben Factor $\cos\frac{\pi}{2}$ destruirt wird. Die reellen Theile von P und Q sind hiernach Null, und man erhält, wenn man allgemein mit: $R\{F(u+vi)\}$ den reellen Theil einer imaginairen Function $F(u+vi)$ bezeichnet, und $\sqrt{1-\sigma}\cdot\sqrt{s}\cdot t$ anstatt t als Variable einführt:

$$(7)\qquad \frac{\partial V}{\partial a} = 4aR\left\{e^{\frac{\pi}{2}i}\int_0^\infty\int_0^1 F(i\sqrt{s}\sqrt{1-\sigma}\sqrt{1-t^2})\,\frac{\sqrt{s}\sqrt{1-\sigma}}{\rho(s+\alpha^2)}\,\partial t\,\partial s\right\}.$$

§. 23. Wenn der Punkt a, b, c ausserhalb des Ellipsoids liegt, so ist die Grösse $1-\sigma$ nicht immer positiv, sondern nur so lange, als s grösser ist, als die positive Wurzel der Gleichung:

$$(6)\qquad \frac{a^2}{s+\alpha^2}+\frac{b^2}{s+\beta^2}+\frac{c^2}{s+\gamma^2}=1.$$

Bezeichnet man diese Wurzel mit λ, so wird der Theil des $\frac{\partial V}{\partial a}$, welcher sich von $s=\lambda$ bis $s=\infty$ erstreckt, genau derselbe, wie wir ihn vorher fanden; der andere, von $s=0$ bis $s=\lambda$ sich erstreckende Theil dagegen ist, wie leicht ersichtlich, wesentlich imaginair. Denn das durch U bezeichnete Integral wird, wie oben, reell, und das andere, durch K bezeichnete, wird, da $\sigma>1$, also $(\sigma-1)s+t^2>0$ ist, jetzt nicht durch die Formel [13] §. 17., sondern durch die Eormel [12] bestimmt, also ebenfalls reell.

Es wird folglich, so lange $\sigma<\lambda$ ist, der reelle Theil durch den Factor $\cos\frac{\pi}{2}$ gänzlich destruirt, und man erhält:

$$(8)\qquad \frac{\partial V}{\partial a}=4aR\left\{e^{\frac{\pi i}{2}}\int_\lambda^\infty\int_0^1 F(i\sqrt{s}\sqrt{1-\sigma}\sqrt{1-t^2})\,\frac{\sqrt{s}\sqrt{1-\sigma}}{\rho(s+\alpha^2}\,\partial t\,\partial s\right\},$$

sobald der angezogene Punkt ausserhalb des anziehenden Ellipsoids liegt.

§. 23. Unter Berücksichtigung der Formel:

$$f(r)=\frac{dF(r)}{dr}$$

kann man, wenn man einstweilen: $i\sqrt{s}\sqrt{1-\sigma}=k$, $\rho(s+\alpha^2)=h$ setzt, das Integral (7) §. 22. folgendermaassen schreiben:

$$\frac{\partial V}{\partial a}=4aR\left\{e^{\frac{\pi}{2}i}\int_0^\infty\int_0^1\int_0^{k\sqrt{1-t^2}} f(x)\,\frac{k}{ih}\,\partial x\,\partial t\,\partial s\right\}.$$

Das auf x, t bezügliche Doppelintegral nimmt, wenn man $k\sqrt{x}$ anstatt x schreibt und $t=\sqrt{y}$ setzt, folgende Form an:

$$\frac{k}{4}\int_0^1\int_0^{1-y} f(k\sqrt{x})\,\frac{\partial x}{\sqrt{x}}\,\frac{\partial y}{\sqrt{y}}.$$

Hierin lässt sich die auf y bezügliche Integration ohne Weiteres ausführen, und man erhält:

$$\frac{k}{2}\int_0^1 f(k\sqrt{x})\,\sqrt{1-x}\,\frac{\partial x}{\sqrt{x}}.$$

Es ergeben sich demnach für die der x-Axe parallel wirkende Attractionscomponente folgende beiden Ausdrücke:

$$X = 2aR\left\{e^{\pi i}\int_0^\infty\int_0^1 f(i\sqrt{1-\sigma}\,\sqrt{st})\,\frac{s(1-\sigma)}{\rho(s+\alpha^2)}\,\sqrt{1-t}\,\frac{\partial t}{\sqrt{t}}\,\partial s\right\},$$

$$X = 2aR\left\{e^{\pi i}\int_\lambda^\infty\int_0^1 f(i\sqrt{1-\sigma}\,\sqrt{st})\,\frac{s(1-\sigma)}{\rho(s+\alpha^2)}\,\sqrt{1-t}\,\frac{\partial t}{\sqrt{t}}\,\partial s\right\},$$

der erstere, wenn der angezogene Punkt innerhalb, der zweite, wenn er ausserhalb des anziehenden Ellipsoids liegt.

Reinhold Krusemarck.

Uebersicht
der von Michaelis 1863 bis dahin 1864 absolvirten Lehrpensa.

Sexta, einjähriger Cursus.

28 St. w. Ordinarius Herrmann.

Religion 3 St. *Herrmann.* Die wichtigsten biblischen Geschichten des A. und N. Testaments; das 1te Hauptstück befestigt und besprochen; die Sprüche dazu, sowie das 2te Hauptstück und monatlich ein Kirchenlied wurden auswendig gelernt. Deutsch 4 St. *Stumpf.* Lesen im Kinderfreunde; mündliches und schriftliches Wiedergeben des Gelesenen; praktische Einübung der Orthographie; die Präpositionen und die Rection derselben, Declamiren. Latein 8 St. *Backe.* Die regelmässige Declination und Conjugation incl. des Deponens; die Genusregeln, Vocabeln, schriftliche und mündliche Uebersetzung der entsprechenden Pensa in Scheele's Uebungsbuch.*) Rechnen 5 St. *Stumpf.* Die 4 Species in benannten Zahlen, mündlich und schriftlich; Anwendung in Beispielen aus dem Geschäftsleben. Geographie 1 St. *Herrmann.* Einleitende Vorkenntnisse, Europa im Allgemeinen, Deutschland und Preussen specieller. Geschichte 2 St. *Herrmann.* Die Sagen des classischen Alterthumes. Technische Fertigkeit 5 St. (Siehe unten.)

Quinta, einjähriger Cursus.

31 St. w. Ordinarius Backe.

Religion 3 St. *Stumpf.* Die biblischen Geschichten A. und N. Testaments und das erste Hauptstück wurden wiederholt; das zweite Hauptstück wurde gelernt, der erste Artikel erläutert und die begründenden Bibelsprüche, sowie 4 Kirchenlieder und 3 Psalmen dem Gedächtniss eingeprägt. Deutsch 4 St. *Herrmann.* Uebung im betonten Lesen und Wiedergeben des Gelesenen; Besprechung geeigneter Lesestücke; der einfache Satz, Einübung der Orthographie durch Abschreiben und Dictate; kleine Aufsätze, Uebung

*) Die für die untern Klassen vorschriftsmässige Ertheilung des Unterrichts im Deutschen und Lateinischen durch einen und denselben Lehrer hat sich bis dahin beim besten Willen hier noch nicht herstellen lassen.

im Declamiren. Latein 6 St. *Backe.* Wiederholung des in der Sexta absolvirten Pensums, hierauf wurden die Comparation, die Zahlwörter, Pronomina, die Conjugatio periphrastica, die irregulären Verba, Präpositionen, einige syntactische Regeln, verbunden mit mündlicher und schriftlicher Uebersetzung der betreffenden Stücke in Scheele's Uebungsbuch durchgenommen, die Vocabeln zu diesen Stücken und ausserdem wöchentlich 30 Vocabeln aus dem Vocabularium von Lentz gelernt. Französisch 5 St. *Backe.* Plötz's Elementarbuch bis Lection 60, avoir und être, die regelmässigen Conjugationen mit Frage und Verneinung, in allen Stunden schriftliche und mündliche Uebungen, wöchentlich ausser den Vocabeln zu den Uebungsstücken 36 Vocabeln aus Plötz's Vocabulaire memorirt. Rechnen 4 St. *Herrmann.* Die vier Species in Brüchen und Anwendung derselben im Dreisatz. Naturbeschreibung 2 St. *Röhl.* Im Winter nach einer kurzen Einleitung in die Zoologie wurden die wichtigsten Gattungen und Arten der Vögel und Fische beschrieben, im Sommer Botanik; das Nothwendigste aus der Terminologie bei Betrachtung und Untersuchung einheimischer Pflanzen von einfacherm Blüthenbau, später die Klassen des Linné'schen Systems. Geographie 1 St. *Stumpf.* Nach Wiederholung des Cursus der Sexta, nähere Betrachtung der Provinz Preussen und des preussischen Staates, Anleitung zum Kartenzeichnen. Geschichte 2 St. *Stumpf.* Geschichte des preussischen Staates bis zum Frieden zu Krakau 1525. Technische Fertigkeiten 4 St.

Quarta, einjähriger Cursus.

32 St. Ordinarius Cuno.

Religion 2 St. *Backe.* Wiederholung und Ergänzung der biblischen Geschichten A. u. N. Testaments, das 2te und 3te Hauptstück durchgenommen, das 4te und 5te gelernt; die früher gelernten Lieder wiederholt und 9 neue dazu gelernt. Deutsch 3 Stunden. *Backe.* Uebung im Lesen, sachliche und sprachliche Analyse des Gelesenen, Uebung in der Orthographie, Aufsätze und Declamiren. Latein 6 St. *Lentz.* Die Verba anomala und defectiva vollständig gelernt, die Formenlehre wiederholt, die wichtigsten syntactischen Verhältnisse mündlich und schriftlich eingeübt, Vocabeln gelernt; gelesen Aurelius Victor Cap. 44—70, zum Theil memorirt. Französisch 5 St. *Cuno.* Wiederholung der regelmässigen Conjugationen, hinzugelernt: die Fürwörter und Zahlwörter und die gebräuchlichsten unregelmässigen Verba; gelesen: aus Plötz's Elementarbuch I. Cursus Abschnitt III—V. Mathematik 6 St. *Krusemarck.* Davon 2 St. Rechnen: Proportions-Prozent-, Zins-, Gewinn-, Verlust- und Gesellschafts-Rechnung. 2 St. Geometrie: Planimetrie bis zur Congruenz der Dreiecke und die leichtesten Sätze vom Kreise. 2 St. Arithmetik: Die vier Species mit Buchstaben, Rechnen mit entgegengesetzten Grössen. Naturbeschreibung 2 St. *Röhl.* Im Winter: Zoologie, Beschreibung der Säugethiere und Amphibien; im Sommer: Botanik, Untersuchung und Bestimmung einheimischer Pflanzen, die Klassen des Linné'schen Systems wiederholt, die Ordnungen gelernt und eingeübt. Geographie 2 Stunden. *Cuno.* Die Anfangsgründe der mathematischen und physicalischen Geographie, die Beschreibung der aussereuropäischen Erdtheile. Geschichte 2 St. *Cuno.* 1 St. die wichtigsten Begebenheiten der alten Geschichte, 1 St. vaterländische Geschichte bis auf die neueste Zeit. Technische Fertigkeiten 4 St.

Tertia, einjähriger Cursus.

32 St. Ordinarius Krusemarck.

Religion 2 St. *Der Director.* Wiederholung der 5 Hauptstücke, unter Rückblikken auf die biblischen Geschichten, Bibelkunde: Psalmen und mehrere längere Stellen des N. Testaments, z. B. Matth. 5, v. 1—12; Matth. 25, v. 31—46; Röm. 7, 14—25; Joh. 1, v. 1—9; 1 Cor. 13, 1—13; Joh. 17, 1—22 wurden nebst den bis dahin erlernten Kirchenliedern wiederholt. Deutsch 3 St. *Cuno.* Lectüre auserwählter Gedichte und prosaischer Stücke, Anfangsgründe der Metrik, Satzlehre, Uebungen im freien Vortrag; alle 2 bis 3 Wochen ein Aufsatz. Latein 5 St. *Lentz.* Lectüre des kleinen Livius von Rothert, 2. Heft liber II.; die syntaxis casuum schriftlich und mündlich geübt, die Formenlehre repetirt, Vocabeln und Sprüchwörter gelernt. Französisch 4 Stunden. *Moll.* Die unregelmässigen Verba; Anwendung von avoir und être; reflexive und unpersönliche Verba. Formenlehre des Substantiv's, Adjectiv's, Adverb's; das Zahlwort, die Präposition; mündliches Uebersetzen ins Französische, Exercitia, gelesen das 4te und zum grössten Theil das 5te Buch von Voltaire's Charles XII., Memorirübungen. Englisch 4 St. *Moll.* Die Aussprache, die Formenlehre, die wichtigsten Regeln der Syntax; Uebungsstücke, theils schriftlich, theils mündlich übersetzt, Vocabeln und Gedichte auswendig gelernt, Exercitia. Mathematik 6 St. *Krusemarck.* 2 St. Rechnen: zusammengesetzte Proportions- und Gesellschafts-Rechnung, Zins-, Rabatt- und Disconto-Rechnung. 2 St Arithmetik: die Lehre von den Brüchen, Proportionen, Decimalbrüchen und ganzen Potenzen nebst Uebungen im Rechnen mit zusammengesetzten Buchstaben-Ausdrücken, Ausziehnung von Quadrat- und Cubikwurzeln. 2 St. Geometrie: Vollendung des planimetrischen Pensums bis zur Quadratur des Kreises incl. Naturbeschreibung 2 St. *Röhl.* Im Winter Zoologie: Beschreibung der Gliederthiere. Im Sommer Botanik: Wiederholung der Classen und Ordnungen des Linné'schen Systems; fortgesetzte Untersuchung und Bestimmung einheimischer Pflanzen; Grundzüge des natürlichen Systems. Gegen das Ende des Semesters: die wichtigsten Naturerscheinungen aus verschiedenen Gebieten der Physik. Geographie 2 St. *Cuno.* Die aussereuropäischen Erdtheile. Geschichte 2 St. *Cuno.* Alte Geschichte bis zur Schlacht bei Actium: Wiederholung der vaterländischen Geschichte. Technische Fertigkeiten 2 St.

Secunda, zweijähriger Cursus.

32 St. Ordinarius Röhl.

Religion 2 St. *Der Director.* Lectüre des Evangeliums Matthaei, Wiederholung der bis dahin gelernten Kirchenlieder, 8 neue hinzugelernt; Psalmen und mehrere umfassendere, die Hauptlehren des Christenthums begründende Stellen des N. T. erläutert und demnächst auswendig gelernt. Deutsch 3 St. *Lentz.* Gelesen wurden Schillers Maria Stuart und Wallenstein, Gedichte von Göthe und Schiller, ausgewählte Abhandlungen; gelegentliche Bemerkungen über die verschiedenen Dichtungs-Arten, besonders über das Drama. Declamiren; freie Vorträge; monatlich ein Aufsatz*). Latein 4 St. Da-

*) Themata: 1) Das Glück. 2) Das Eleusische Fest oder der Ackerbau als Anfang der Cultur.

von 2 St. *Lentz.* Syntax, die Lehre von den temporibus und modis; wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. 2 St. *Der Director.* Lectüre des Caesar de bello gallico von liber IV cap. 9 bis lib. VI. Französisch 4 St. *Moll.* Wiederholung des Pensums der Tertia, Wortstellung, Gebrauch der Zeiten und Moden; Syntax des Artikels, des Adjectivs und des Adverbs. Mündliches Uebersetzen ins Französische, Exercitia und Extemporalia wöchentlich abwechselnd. Gelesen: Histoire de Napoléon par Ségur das 7. und 8. Buch. Englisch 3 St. *Moll.* Wiederholung des Pensums der Tertia, Bestimmungen des Substantivbegriffs, Construction der Satzbestimmungen, der Infinitiv und das Particip als Satztheil und als Satzbestimmung; die Beiordnung der Sätze; mündliches Uebersetzen ins Englische, verbunden mit Vocabellernen; wöchentlich ein Exercitium oder ein Extemporale. Gelesen: Tales of the Alhambra by Washington Irving: Local traditions, the house of the weathercock, legend of the arabian astrologer, the towers of las infantas, legend of the three beautiful princesses. Mathematik 5 St. *Krusemarck.* 1 St. Rechnen: Wiederholung der Rechnungsarten des gemeinen Lebens; logarithmisches Rechnen. 2 St. Algebra: Gleichungen des ersten und zweiten Grades mit einer und mehreren Unbekannten, theils im Ansatze, theils in erzählender Form; Potenzen mit gebrochenen Exponenten, Logarithmen, Zinseszins- und Renten-Rechnung; Progressionen. 2 St. Geometrie: ebene Trigonometrie. Naturbeschreibung 2 St. *Röhl.* Im Winter Anthropologie. Im Sommer Botanik, Kenntniss des natürlichen Systems und Betrachtung der wichtigsten exotischen Gewächse. Physik 2 St. *Röhl.* Die Lehre vom Magnetismus, die allgemeinen Eigenschaften der Körper, die Lehre vom Schalle und die mechanischen Erscheinungen der flüssigen Körper durchgenommen und durch Versuche erläutert. Chemie 2 St. *Röhl.* Einleitung über die chemischen Eigenschaften der Körper überhaupt, darauf die Metalloide und die Alkalimetalle nebst ihren wichtigsten Verbindungen behandelt und viele zugehörige Versuche angestellt. Geographie 1 St. *Cuno.* Die aussereuropäischen Erdtheile. Geschichte 2 St. *Cuno.* Alte Geschichte, Geschichte des Mittelalters bis zum Abgang der Karolinger, Wiederholung der vaterländischen Geschichte. Technische Fertigkeiten 6 St.

Prima, zweijähriger Cursus.

32 St. Ordinarius Lentz.

Religion 2 St. *Der Director.* Lectüre des Galater-Briefes, Veranlassung desselben im Vergleiche mit dem Römer-Briefe; Hinweisung auf die Unterscheidungslehren der christlichen Kirchen, auf den lutherischen Katechismus und die augsburgische Confession, deren wichtigste Artikel demnach besonders durchgenommen wurden. Deutsch 3 St. *Der Director.* Ueberblick der Literatur-Geschichte. Gelesen: Nathan der Weise von Lessing. Uebung im Definiren, Disponiren, Besprechung synonymischer Ausdrücke. Alle Monat

3) Nacherzählung der Götheschen Ballade: Die Kinder, sie hören es gerne. 4) Leben und Character Mortimers, oder wie sieht ein Schwärmer aus? 5) Das Leben des Menschen gleicht einem Wintertage. 6) Leben und Character der Maria Stuart. 7) Der Blick in die Zukunft. 8) Des Menschen Engel ist die Zeit. 9) Ueber das Sprüchwort: Eine Schwalbe macht keinen Sommer. 10) Characteristik Alexanders des Gr. nach Göttling in dessen gesammelten Abhandlungen zum classischen Alterthume Bd. 2. 11) Der Nutzen der Schifffahrt. 12) Der Nutzen der Schrift.

einen Aufsatz *). Latein 3 St. *Lentz.* Gelesen wurde: Livius lib. I, Virgilii Aeneidos lib. IV bis VII, ausgewählte Oden des Horaz; Prosodie und Metrik. Französisch 4 St. *Moll.* Wiederholung der ganzen Syntax, mündliches Uebersetzen ins Französische, alle 14 Tage ein Exercitium oder Aufsatz, Extemporalia. Gelesen wurden aus Herrig's „la France litteraire" die Abschnitte von de la Bruyère, Corneille, Guizot, A. de Vigny, Thiers, Mérimée, Andrieux, Dumas, Reboul, Thierry. Uebung in der Conversation. Englisch 3 St. *Moll.* Wiederholung der ganzen Syntax, mündliches Uebersetzen ins Englische, alle 14 Tage abwechselnd ein Exercitium oder Aufsatz, Extemporalia. Gelesen: aus Herrig's Classical Authors die Abschnitte von Addison, Macaulay, Tennyson, Coleridge, Grattan und Clarke. Uebung im mündlichen Ausdruck. Mathematik 5 St. *Krusemarck.* 2 St. Algebra: Gleichungen des dritten und vierten Grades, Anfangsgründe der Theorie der numerischen Gleichungen, Progressionen, figurirte Zahlen, die einfachsten Reihen und die allgemeine Bestimmung der Convergenz der Reihen. 2 St. Geometrie: Stereometrie, sphärische Trigonometrie, analytische Geometrie, namentlich die Lehre von den Kegelschnitten. 1 St. Mechanik: Anfangsgründe der Statik und Dynamik. Während des Wintersemesters wurden die Schüler in einer Extrastunde wöchentlich mit den Elementen der Differential-Rechnung bekannt gemacht. Physik 3 St. *Röhl.* Die mechanischen Erscheinungen der festen Körper durchgenommen und durch Versuche erläutert, auch verschiedene Uebungs-Aufgaben gelöst; darauf Wiederholung der wichtigsten Abschnitte aus der Lehre vom Lichte. Chemie 3 St. *Röhl.* Die Metalle wurden behandelt und das Vorgetragene durch Versuche möglichst veranschaulicht. Geographie 1 St. *Cuno.* Allgemeine (mathematische und physikalische) Geographie; Wiederholung des gesammten Cursus der besondern Geographie. Geschichte 2 St. *Cuno.* Die zweite Hälfte der Geschichte des Mittelalters, Geschichte der neuern Zeit bis zum zweiten Pariser Frieden. Technische Fertigkeiten 5 St.

Technische Fertigkeiten.

Schreiben 7 St. w. *Laury.* In Sexta, Quinta und Quarta die deutsche und englische Currentschrift nach Herzsprung. Uebung im Taktschreiben.

Zeichnen. *Laury.* 2 St. in Sexta: Die Elemente der Formenlehre, geradlinige Figuren nach Vorlegeblättern; Zeichnen nach quadratischen Holzkörpern. In Quinta 2 St.: Fortsetzung des Figurenzeichnens nach Vorlegeblättern und Holzkörpern. In Quarta 2 St.: Freihandzeichnen — Köpfe und Arabesken; die Elemente der Perspective. In Tertia 2 St.: Fortsetzung der Perspective, Projectionszeichnen; Köpfe mit ganzer Schattenanlage; Zeichnen nach Gypskörpern. In Secunda 2 St.: Projectionszeichnen, Schatten-Construction und Perspective, Landschaftszeichnen. In Prima 3 St.; Perspectivische Zeichnungen nach der Natur, Zeichnen menschlicher Körper; die Elemente des Planzeichnens.

---

*) Themata: 1) Wer ist ein Gebildeter zu nennen? 2) Rächet euch selber nicht. 3) Halte die Gebote, so halten sie dich. 4) Wie wird der Rückblick auf unsere Schulzeit beschaffen sein? 5) Ueber den Nutzen der Kreuzzüge. 6) Ein frei gewähltes Thema. 7) Der wahre Menschenfreund 8) Die Macht des Gesanges. 9) Die Jugend der Friedfertigkeit. 10) Ueber den Segen der Arbeitsamkeit. 11) Was du beginnst, beginne mit Vorsicht; was du thust, thue mit Umsicht; was du beurtheilst, richte mit Nachsicht. 12) Ueber den Vorzug eines guten Gedächtnisses.

Singen 6 St. *Völkerling.* Von den drei Singklassen, in welche die Schüler der Realschule getheilt sind, erhielt jede wöchentlich 2 St. Unterricht. Die dritte Singklasse übte im ersten Semester nach dem Gehör einstimmige Lieder und Choräle; im zweiten Semester daneben die Tonleitern der gebräuchlichsten Durtonarten und die leichtern Intervalle. Die zweite Singklasse mehrstimmige Lieder für Sopran und Alt aus Erk's Sängerhain Heft I, die schwerern Intervalle, die Tonleiter der Molltonarten und liturgische Chöre. Die erste Singklasse sang vierstimmige Lieder, hauptsächlich aus Erk's Sängerhain Heft I, II, III, und Chöre aus Haydn's Jahreszeiten.

Turnen 4 St. Der Seminarlehrer *Konsalik.* Die Schüler der Realschule turnen in zwei Abtheilungen abwechselnd an den schulfreien Nachmittagen.

Verfügungen und Mittheilungen der Behörden.

1. Vom 30. September 1863 von der Königl. Regierung. Abschrift eines Ministerial-Erlasses, worin die von dem Oberlehrer Schütz zu Minden herausgegebenen Characterbilder aus der englischen neuern Geschichte und französischen Geschichte zum Gebrauche an Realschulen empfohlen werden.
2. Vom 30. October 1863 von der Königl. Regierung. Abschrift eines Ministerial-Erlasses mit zwei Exemplaren des Lehrplanes für den Unterricht im Zeichnen an Gymnasien und Realschulen.
3. Vom 3. November 1863. Die Königl. Regierung verfügt auf Anordnung des Herrn Ministers der geistlichen Angelegenheiten, am 1. jeden Monats anzuzeigen, welche Personal-Veränderungen im Laufe jeden Monats an der Realschule vorgekommen sind.
4. Vom 19. December 1863. Die Königl. Regierung verfügt, dass künftighin Seitens der hiesigen Schule 218 Exemplare ihres jährlichen Programms an das Königliche Provinzial-Schul-Collegium einzusenden sind.
5. Vom 16. Januar 1864. Eine Verfügung der Königl. Regierung, dass von jetzt ab 219 Exemplare an das Königl. Provinzial-Schul-Collegium eingesandt werden sollen.
6. Vom 23. Januar 1864. Die Königl. Regierung übersendet der Realschule die Verhandlungen über die vorjährige an der hiesigen Realschule abgehaltene Entlassungs-Prüfung nebst Abschrift des von der Königl. wissenschaftlichen Prüfungs-Commission über den Ausfall der Prüfung abgegebenen Gutachtens.
7. Vom 29. Januar 1864. Die Königl. Regierung übersendet der Realschule einen Extract aus dem Rescripte des Herrn Ministers der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten, betreffend die Aufstellung der Nachweisungen über die Personal-Veränderungen an den höhern Unterrichts-Anstalten.
8. Vom 27. April 1864. Eine Verfügung der Königl. Regierung, dass von dem Programm der hiesigen Realschule jährlich 6 Exemplare an Hochdieselbe einzusenden sind.
9. Vom 27. April 1864. Eine Verfügung der Königl. Regierung, worin die Schule unter

Hinweisung auf die Amtsblatts-Bekanntmachung vom 17. Februar 1864 darauf aufmerksam gemacht wird, dass vom Jahre 1865 ab die Zeugnisse der Reife einer Realschule zweiter Ordnung nicht mehr genügen, um zu der Laufbahn im Königl. Forst-Verwaltungs-Dienste zugelassen zu werden.

10. Vom 25. Mai 1864. Eine Verfügung der Königl. Regierung, worin in Folge eines Erlasses des Herrn Ministers der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten angeordnet wird, dass die Schüler höherer Lehranstalten, welche später in das Königl. Gewerbe-Institut einzutreten beabsichtigen, von den Directoren dieser Anstalten bei Zeiten auf das im Königl. Gewerbe-Institut unerlässliche Erforderniss einer genügenden Fertigkeit im Freihand- und Linearzeichnen aufmerksam zu machen seien, und dass den Zeichnenlehrern empfohlen werde, sich der betreffenden Schüler besonders anzunehmen.
11. Vom 8. Juni 1864. Der Magistrat theilt der Schule den von der Königl. Regierung bestätigten Beschluss mit, dass jedes den hiesigen Schulen zugeführte Kind auf mindestens ein halbes Jahr, vom 1. April und vom 1. October an gerechnet, zur Zahlung des Schulgeldes verpflichtet ist, und dass nur in dem Falle, wenn durch ein ärztliches Attest nachgewiesen wird, dass das betreffende Kind länger als 3 Monate durch Krankheit vom Schulbesuche abgehalten worden ist, ausnahmsweise das Schulgeld für diese Zeit erlassen werden kann.
12. Vom 6. Juli 1864. Eine Verfügung der Königl. Regierung, dass von jetzt ab 220 Exemplare des hiesigen jährlichen Schulprogramms an das Königl. Provinzial-Schul-Collegium einzusenden seien.
13. Vom 19. Juli 1864. Die Königl. Regierung lässt der Realschule einen Erlass des Herrn Ministers der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten zugehen, in welchem die für das Bedürfniss der Real- und höhern Bürgerschulen vom Professor Dr. Fromm zu Berliu herausgegebene kleine Schulgrammatik der lateinischen Sprache zur Benutzung an diesen Anstalten empfohlen wird.

Weitere Nachrichten.

Am Schlusse des Sommersemesters 1863, am 7. October v. J., wurden folgende Werke: 1. Homer's Ilias und Odyssee von Faesi; 2. die griechische Grammatik von Krüger, 3 B.*); 3. die Geschichte der deutschen National-Literatur von Vilmar; 4. die Götter und Heroen des classischen Alterthums von Stoll; 5. die Naturgeschichte von Reichenbach; 6. Grimm's Märchen der Griechen und Römer; 7. die Freiheitskriege von Biernatzki, und mehrere belehrende Jugendschriften an dieser Auszeichnung würdige Schüler vertheilt.

Am 14. October 1863 fand die Prüfung der zum Eintritt in die Realschule und deren Vorbereitungsklassen angemeldeten Schüler statt.

Am 15. October v. J., Vormittags 8 Uhr, nahm der Unterricht im Wintersemester, am 7. April d. J. im Sommersemester seinen Anfang.

Erhebliche Beeinträchtigungen des Unterrichtes durch längere Krankheiten der Lehrer

*) An einen Secundaner, der auf ein Gymnasium überzugehen beabsichtigt.

sind in dem verwichenen Schuljahre nicht vorgekommen; ebenso kann auch der Gesundheits-Zustand der Schüler im Ganzen als befriedigend bezeichnet werden.

Am 22. März c. betheiligte sich die Schule, wie bisher, an dem zur festlichen Geburtstagsfeier Sr. Majestät des Königs in der Stadtkirche veranstalteten Gottesdienste.

Am 21. Mai absolvirte der an der hiesigen Realschule fungirende wissenschaftliche Hülfslehrer Wilhelm Backe seine Prüfung vor der wissenschaftlichen Prüfungs-Commission zu Königsberg, nach deren Ausfall ihm die facultas zum Unterrichte in der griechischen, lateinischen, französischen und deutschen Sprache zuerkannt worden ist.

Ein Lehrerwechsel hat seit dem Januar 1863 an der hiesigen Schule nicht stattgefunden.

Die Michaelis-Ferien begannen im verwichenen Schuljahre am 8. und endigten am 15. October. Zu Weihnachten wurde der Unterricht am Mittwoch vor dem Feste, den 23. December, geschlossen und am 7. Januar wieder angefangen. Die Oster-Ferien dauerten vom 23. März bis zum 7. April, die Pfingst-Ferien vom 14. bis zum 19. Mai. Die Sommer-Ferien nahmen am 7. Juli ihren Anfang und dauerten bis zum 4. August.

Ausserdem ist der Unterricht in dem verwichenen Schuljahre noch an sechs Tagen ausgefallen: am Krönungstage, am Geburtstage Sr. Majestät des Königs und an jedem ersten Tage der vier hier stattfindenden Jahrmärkte.

Uebersicht

der für jeden Unterrichts-Gegenstand bestimmten Lehrstunden.

Fächer.	Classen und Stunden.						
	VI.	V.	IV.	III.	II.	I.	Summa.
Religion	3	3	2	2	2	2	14
Deutsch	4	4	3	3	3	3	20
Latein	8	6	6	5	4	3	32
Französisch		5	5	4	4	4	22
Englisch				4	3	3	10
Geographie u. Geschichte	3	3	4	4	3	3	20
Naturwissenschaft		2	2	2	6	6	18
Mathematik u. Rechnen	5	4	6	6	5	5	31
Schreiben	3	2	2				7
Zeichnen	2	2	2	2	2	3	13
	28	31	32	32	32	32	187
Singen	in den drei Singklassen 6 St. w. ausser der Schulzeit.						

Vertheilung der Stunden unter die Lehrer.

No.	Lehrer.	Ord.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Summa.
1	Director Jacobi		2 Religion 3 Deutsch	2 Religion 2 Latein	2 Religion				11
2	Oberlehrer Dr. Lentz	I.	3 Latein	3 Deutsch 2 Latein	5 Latein	6 Latein			19
3	Oberlehrer Röhl	II.	6 Naturwissenschaft	6 Naturwissenschaft	2 Naturwissenschaft	2 Naturwissenschaft	2 Naturwissenschaft		18
4	Ordentlicher Lehrer Krusemarck	III.	5 Mathematik	5 Mathematik	6 Mathematik	6 Mathematik			22
5	Ordentlicher Lehrer Cuno	IV.	3 Gescht. u. Geogr.	3 Gescht. u. Geogr.	4 Gescht. u. Geogr. 3 Deutsch	4 Gescht. u. Geogr. 5 Französ.			22
6	Wissenschaftl. Hülfslehrer Moll		4 Französ. 3 Englisch	4 Französ. 3 Englisch	4 Französ. 4 Englisch				22
7	Wissenschaftl. Hülfslehrer Backe	V.				2 Religion 3 Deutsch	6 Latein 5 Französ.	8 Latein	24
8	Ordentlicher Lehrer Herrmann	VI.					4 Deutsch 4 Rechnen	3 Religion 3 Gescht. u. Geogr.	14
9	Lehrer Stumpf						3 Religion 3 Gescht. u. Geogr.	4 Deutsch 5 Rechnen	15
10	Zeichnen- u. Schreiblehrer Laury		3 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen 2 Schreib.	2 Zeichnen 2 Schreib.	2 Zeichnen 3 Schreib.	20
11	Gesanglehrer Völkerling		6 Stunden Gesangunterricht ausser der Schulzeit.						
								Summa	187

Lehrer			Summa
Lehrer der I. Vorbereitungskl. Stumpf	In der I. Vorbereitungskl. ertheilen:	Stumpf 10 St. Hermann 10 St. Laury 6 St.	26
Lehrer der II. Vorbereitungskl. Völkerling			22
		Summa	48

Uebersicht

der Frequenz der Realschule.

Classen.	Am Anfang des Cursus.	Aufgenommen.	Abgegangen.	Schlusszahl.
Prima	8	1	3	6
Secunda	24	—	5	19
Tertia	43	—	6	37
Quarta	56	2	6	52
Quinta	43	2	6	39
Sexta	47	18	6	59
	221	23	32	212
der Vorschule.				
Obere Klasse	34	12	4	42
Untere Klasse	23	6	3	26
	57	18	7	68

Nach dem Ergebniss der von dem Königl. Commissarius, Herrn Regierungsrath Conditt auf den 24. September anberaumten und an diesem Tage abgehaltenen diesjährigen Abiturienten-Prüfung erhielten die vier Primaner, die sich zu dieser Prüfung gemeldet hatten, das Zeugniss der Reife, und zwar:

1. Rudolph Scharlok, Sohn des Apothekers Scharlok hierselbst, 18 Jahre alt, evangelisch, 10 Jahre auf der Schule, 2 Jahre in Prima, mit dem Prädikate: genügend bestanden; er widmet sich der Landwirthschaft.
2. Eugen Hirschberg, Sohn des hiesigen Kaufmanns Hirschberg, 16 Jahre alt, mosaischen Glaubens, 9 Jahre auf der Schule, 2 Jahre in Prima, — welchem in Anbetracht seiner Leistungen durch den Beschluss der Prüfungs-Commission die mündliche Prüfung erlassen worden, — mit dem Prädikate: gut bestanden; er widmet sich dem Handelsstande.
3. Franz Schlacht, Sohn des hier verstorbenen Fleischermeisters Schlacht, unter Vormundschaft des Kaufmanns Alberti hierselbst, 18 Jahre alt, evangelisch, 12 Jahre auf der Schule, 2 Jahre in Prima; mit dem Prädikate: genügend bestanden; widmet sich nach Ableistung seiner Militairdienstpflicht dem Baufach.
4. Theodor Holder-Egger, Sohn des verstorbenen Wirthschafts-Inspectors Holder-Egger zu Schönwalde bei Lessen, unter Vormundschaft des Schneidermeisters Müller hierselbst, 17½ Jahre alt, 8 Jahre auf der Schule, 2 Jahre in Prima, mit dem Prädikate: genügend bestanden; widmet sich dem Militairstande.

Die bei der schriftlichen Prüfung bearbeiteten Themata und Aufgaben:

1. Im Deutschen: Vor Jedem steht ein Bild dess', was er werden soll; so lang er das nicht ist, ist nicht sein Friede voll.
2. Zum französischen Aufsatz: Charles Quint et François I.
3. Ein englisches Scriptum: Character of Queen Elisabeth of England.
4. In der Mathematik: a. Das Volumen eines geraden Kegels sei $7\frac{1}{2}$ Kubikfuss, die Manteloberfläche 25 Quadratfuss; wie gross ist der Radius des Grundkreises und wie gross die Höhe? b. Die Spitze S eines Thurmes wird von drei Standpunkten aus gesehen, welche in gerader Linie und in derselben Horizontalebene liegen, auf welcher der Thurm steht. A, B, C seien die drei Standpunkte, FS der Thurm. Man hat durch Messung gefunden: $AB = 1750'$; $BC = 1047'$; $\sphericalangle FAS = 19^{\circ}\ 27'\ 15''$; $\sphericalangle FBS = 13^{\circ}\ 4'\ 7''$; $\sphericalangle FCS = 10^{\circ}\ 48'\ 25''$, und soll hieraus die Entfernung BF und die Höhe FS berechnen. c. Es sind zwei concentrische Kreise und ein Punkt zwischen ihren Peripherien gegeben. Man soll einen dritten Kreis construiren, dessen Peripherie durch diesen Punkt geht und die beiden gegebenen Kreise berührt. d. Zwei Kreise, der eine mit dem Radius 36 Zoll, der andere mit dem Radius 16 Zoll, bewegen sich gleichförmig mit ihren Mittelpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels nach dessen Scheitelpunkte hin. Der erste legt jede Secunde 2 Zoll zurück und ist 38 Zoll vom Scheitelpunkte entfernt; der zweite legt jede Secunde 18 Zoll zurück und ist 210 Zoll vom Scheitelpunkte entfernt. Wann werden beide Kreise einander berühren?
5. In der Mechanik, Physik und Chemie. a. Auf einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel α ist, liege ein Körper von einem Gewichte g; auf diesen wirke eine aufwärts ziehende Kraft P, die mit der schiefen Ebene den Winkel β bildet. Wie gross muss eine zur Herstellung des Gleichgewichtes nöthige Kraft Q sein, die auf den Körper schiebend wirkt und dabei mit der Ebene den nach abwärts gerichteten Winkel γ bildet? Welcher Werth für Q würde sich ergeben, wenn $g = 1000$ Pfd., $P = 200$ Pfd., $\alpha = 20^{\circ}$, $\beta = 10^{\circ}$, $\gamma = 50^{\circ}$ ist? b. Das physische Bild, welches ein Hohlspiegel von der Brennweite p von einem Gegenstande hervorbringt, habe von dem letztern den Abstand d; wie gross sind dann die Entfernungen a und α des Gegenstandes und seines Bildes vom Spiegel? Welche Werthe findet man für $p = 6''$ und $d = 16''$? c. Eine Silbermünze, die 5 Loth wog, wurde in Schwefelsäurehydrat aufgelöst und das Silber als Chlorsilber gefällt. Es fanden sich 0,498 Loth trocknes Chlorsilber. α. Welchen Werth hatte jene Münze und wieviellöthig war dieselbe? β. Wieviel krystallisirter Kupfervitriol konnte aus dem Rückstande gewonnen werden?

Lehrmittel.

Für die Bibliothek der Schule ist im verwichenen Jahre angeschafft worden: Schütz, Characterbilder aus der französischen Geschichte. Nissen, Unterredungen über Luther's kleinen Katechismus und die Unterredungen über die biblischen Geschichten A. u. N.

Testamentes. Als Fortsetzungen: Kurz, Geschichte der deutschen Literatur; Thiers, Geschichte des franz. Consulats und des Kaiserreiches; Kolb, Atlas der Naturgeschichte; Keil, Grammat. latina, vol. III, fasc. 2; der Jahresbericht über die Fortschritte in der Chemie; die Zeitschrift für Gymnasialwesen von Dr. Hollenberg; das pädagogische Archiv von Langbein; das Centralblatt für die gesammte Unterrichts-Verwaltung.

Von dem Königl. Provinzial-Schul-Collegio wurden der Schule die Programme der meisten preussischen Gymnasien und Realschulen zugefertigt.

Für den Zeichnen-Unterricht wurden 50 Hefte Vorlegeblätter, Ornamente, Landschaften und Köpfe, dazu 12 Hefte mit grössern Vorbildern und 36 grössere Blätter, letztere für die obern Klassen, angeschafft.

An Geschenken erhielt die Schule: 1. Von dem Director der Realschule zu Posen, Dr. Brennecke, dessen englisches Lesebuch mit Sylben-Abtheilung, Laut- und Ton-Bezeichnung nebst sachlichen Erläuterungen. 2. Von der Verlagsbuchhandlung A. L. Ritter — Tales of a grandfather by Sir Walter Scott, ausgewählt, mit Anmerkungen und einem Wörterbuche von John Henry. 3. Von der Verlagsbuchhandlung Rud. Hartmann in Leipzig — Grundriss der Geschichte der englischen Sprache und Literatur, aus den Unterrichtsbriefen nach der Methode von Toussaint-Langenscheidt. 4. Von der Universitäts-Buchhandlung Carl Winter zu Heidelberg — Leitfaden der Weltgeschichte von Dr. Dittmar. 5. Von der Coppenrath'schen Buch- und Kunsthandlung zu Münster — Aufgaben zum Unterricht im Rechnen, II. Theil.

Für diese uns zugegangenen willkommenen Gaben sage ich den wohlwollenden Gebern hierdurch Namens der Schule den ergebensten Dank.

Ordnung der öffentlichen Prüfung

am 4. October 1864.

Vormittags von 8 Uhr ab.

Quarta: Mathematik — *Krusemarck.*
Französisch — *Cuno.*
Tertia: Englisch — *Moll.*
Geschichte — *Cuno.*
Secunda: Chemie — *Röhl.*
Geometrie — *Krusemarck.*
Prima: Latein — *Lentz.*
Französisch — *Moll.*

Nachmittags von 2 Uhr ab.

Die 2. Vorbereitungsklasse:
Religion und Lesen — *Völkerling.*
Die 1. Vorbereitungsklasse:
Religion — *Herrmann.*
Deutsch — *Stumpf.*
Sexta: Geschichte — *Herrmann.*
Latein — *Backe.*
Quinta: Geographie — *Stumpf.*
Französisch — *Backe.*

Entlassung der Abiturienten.

Schluss-Gesang.

Mittwoch den 5. October, Vormittags 9 Uhr, erhalten die Schüler aller Klassen ihre Censuren, und demnächst werden den Zöglingen der Schule, die sich im verwichenen Cursus durch Fleiss und gute Führung hervorgethan, die ihnen von der Lehrer-Conferenz zuerkannten Prämien übergeben.

Der Unterricht im neuen Cursus beginnt Donnerstag den 13. October, Vormittags 8 Uhr.

Die Prüfung und Aufnahme neu eintretender Schüler findet am 12. October von Vormittags 9 Uhr ab statt.

Graudenz, am 28. September 1864.

Jacobi,
Director der Realschule.